Que. No.i – Find the optimal solution (numerically) for the next LPP;:

$$\text{Minimize } Z = 4x_1 + x_2$$
$$\left.\begin{array}{ll} \text{S.t.} & 3x_1 + x_2 = 3 \quad ,(1) \\ & 4x_1 + 3x_2 \geq 6, \quad (2) \\ & x_1 + 3x_2 \leq 4 \quad (3) \end{array}\right\} \quad (1) \qquad \& \; x_1 , x_2 \geq 0 .$$

The answer of | Que. No.i

هذه المسألة قيودها مختلطة علاوة علي كونها min، لذا لا يمكن حلها كما ذكرنا إلا بطريقة الضريبة (الغرامة) الكبري (M technice) او طريقة المرحلتين والطريقة الأخيرة هي الأسهل والأحدث:

طريقة المرحلتين: كما كان الحل بالسمبلكس سابقا، نضيف المتغيرات الموجبة الزائدة (Slack variables) الي متباينات القيود لتحويلها الي متساويات ليصبح الموديل كالتالي:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Min } Z = 4x_1 + x_2 & \\ \text{S.t.} \quad 3x_1 + x_2 = 3 \; , \; (1) & (= \text{ هذا القيد كان}) \\ 4x_1 + 3x_2 - s_1 = 6, \; (2) & (\geq \text{ هذا القيد كان}) \\ x_1 + 3x_2 + s_2 = 4 \; (3) & \& \; x_1 , x_2 . s_1 , s_2 \geq 0 \end{array}\right\} (2)$$

* فعند بداية الحل، أي عندما تكون قيم $x_2 = x_1 = 0$، (أي عند عدم وجود انتاج) وبالتعويض في معادلات القيود عنها ، المفروض أن نحصل علي قيم لـ s_1 , s_2 لتدل علي وجود مواد خام أو ساعات عمل لم تبدأ أو عمالة لم تبدأ ....، لكن سنري أن ما نحصل عليه كالتالي: $s_1 = -6$ & $s_2 = 4$ ، والقيم السالبة لـ s_1 تنافي أن قيم المتغيرات الزائدة وكل المتغيرات المستخدمة في حل المسألة لا بد أن تكون موجبة.

** كما نجد أنه من القيد الأول عند ($x_2 = x_1 = 0$) أن $0 = 3$ وهذا غير منطقي ، لذا المتغيرات الزائدة لم تفي بالغرض ،وبناءا علي ذلك يجب إضافة متغيرات أخري تسمي متغيرات زائفة أو صناعية وتكون موجبة (Artificial variables) R_1, R_2 ، وهذه المتغيرات تضاف للقيود الغير منطقية أي القيدين رقمي (2) ، (3) في الموديل رقم (2) فيصبح الموديل السابق كما يلي:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Min } Z = 4x_1 + x_2 & \\ \text{S.t.} \quad 3x_1 + x_2 + R_1 = 3, \ldots (1) & (= \text{ هذا القيد كان}) \\ 4x_1 + 3x_2 - s_1 + R_2 = 6, \ldots (2) & (\geq \text{ هذا القيد كان}) \\ x_1 + 3x_2 + s_2 = 4, \; (3) & \& \; x_1, x_2 . s_1 , s_2, R_1, R_2 \geq 0 \end{array}\right\} (3)$$

ويمكن الآن تجربة معقولية ووضعية الموديل بالتعويض بعد ($x_2 = {}_1 = 0$) في القيود (1) (2) , (3) , بالموديل رقم (3) نجد أن $R_1 = 3$ ، $R_2 = 6 + s_1$, $s2 = 4$, أي أن ,الناتج مقبول وعليه نبدأ الحل:

أولا المرحلة الأولي:

i – نبدل دالة الهدف في الموديل ا(3) بدالة هدف أخري وهي عبارة عن مجموع المتغيرات الصناعية $(r = R_1 + R_2)$ (مع ملاحظة أن هذه المتغيرات الصناعية ستكون بإشارة سالبة اذا كانت المسألة (Max فيصبح الموديل السابق كالتالي

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimize } r = R_1 + R_2 & \\ \text{S.T.} \quad 3x_1 + x_2 + R_1 = 3, \ldots (1)\, c & \\ 4x_1 + 3x_2 - s_1 + R_2 = 6, \ldots (2)\, c & \\ x_1 + 3x_2 + s_2 = 4, \ldots (3)\, c & \& \; x_1, x_2 . s_1 , s_2, R_1, R_2 \geq 0 \end{array}\right\} (4)$$

زمن القيدين الأول والثاني في موديل (4) نحصل علي

$$R1 = 3 - 3x_1 + x_2 , \quad R_2 = 6 - 4x_1 - 3x_2 + s_1$$

بالتعويض عن قيمتي R_1, R_2 من معادلات القيود السابقة في دالة الهدف الجديدة بالموديل(4) فنحصل علي: $R_1 + R_2 = 9 - 7x_1 - 4x_2 + s_1$ ثم نعوض بذلك في دالة الهدف لنحصل علي:

$$\text{Minimize} \quad r = 9 - 7x_1 - 4x_2 + s_1 + 0S_2 + 0R_1 + 0R_2$$

ثم نحول حدود دالة الهدف بجانب كلمة Minimize فيصبح الموديل كالتالي:

$$\left.\begin{aligned} \text{Min} \quad & r + 7x_1 + 4x_2 - s_1 + 0S_2 + 0R_1 + 0R_2 = 9 \\ \text{S.T.} \quad & 3x_1 + x_2 + R_1 = 3, \ldots (1)\ d \\ & 4x_1 + 3x_2 - s_1 + R_2 = 6, \ldots (2)\ d \\ & x_1 + 3x_2 + s_2 = 4, \ldots (3)\ d \quad \& \ x_1, x_2, s_1, s_2, R_1, R_2 \geq 0 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

ونلاحظ أنه تم وضع المتغيرات $0S_2 + 0R_1 + 0R_2$ في دالة الهدف الجديدة لأن دالة الهدف لابد أن تحتوي علي كل المتغيرات الموجودة بالمسألة

*** نبدأ الحل بتكون جدول السمبلكس من الموديل السابق، وسيكون كالتالي

Phase (I) : we construct the simlex table as follows:

	r	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	S_2	الحد المطلق
	1	7	4	-1	0	0	0	9
R_1		3	1	0	1	0	1	3
R_2		4	3	-1	0	1	0	6
S_2		1	1	0	0	0	1	4

في الجدول السابق نجد أن المتغيرات S_2, R_1, R_2 هي متغيرات أساسية (عند بداية الحل) وكذلك القيم التي تقابلها في معاملات دالة الهدف مساوية للصفر، لذا يتم وضعها في العمود الأول بالجدول السابق ويوضع كل من متغير هذه المتغيرات امام القيد الذي ينتمي اليه

ii – نبدأ الآن في حل المصفوف التالية بإستخدام خطوات الحل بطريقة السمبلكس كما كان في مثال سابق وبعد تحديد عمود الإرتكاز (بتحديد أكبرقيمة موجبة تحت x_1) وصف الإرتكاز (الصف الأول) ثم عنصر الإرتكاز 3 فيكون العنصر الداخل هو x_1 والعنصر الخارج هو R_1

	r	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	الحد المطلق
	1	7	4	-1	0	0	0	9
R_1		3	1	0	1	0	1	3
R_2		4	3	-1	0	1	0	6
S_2		1	1	0	0	0	1	4

وبعد اتخاذ خطوات الحل في الجدول السابق ، سنحصل علي جدول حل المرحلة الأولي كالتالي:

	r	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	الحد المطلق
	1	0	0	0	-1	0	0	0
x_1		1	0	1/5	3/5	-1/5	0	3/5
x_2		0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	6/5
S_2		0	0	1	0	-1	1	1

ومن خانة الحد المطلق بالجدول السابق (جدول حل المرحلة الأولي) نجد أن $r = R_1 + R_2 = 0$ ، أي أن $R_1=0, \quad R_2=0$ ، أي أن المتغيرات الزائفة لا قيمة لها وهما في نفس الوقت د ليلا أساسيين علي أن نستمر في الحل لإيجاد باقي الحل بإستخدام المرحلة الثانية.

ثانيا المرحلة الثانية:

في بداية المرحلة الثانية ، نبدأ في الجدول السابق بالإستغناء عن أعمدة المتغيرات الزائفة ، لذا الجدول السابق يأخذ الشكل التالي:

	r	x_1	x_2	s_1	s_2	الحد المطلق
	1	0	0	0	0	0
x_1		1	0	1/5	0	3/5
x_2		0	1	-3/5	0	6/5
S_2		0	0	1	1	1

من الجدول الجديد السابق نستطيع أن نحصل منه علي معادلات القيود الجديدة كالتالي (إتبع الأسهم):

$$\left.\begin{aligned} x_1 + (1/5)\, s_1 &= (3/5) \\ x_2 - (3/5)\, s_2 &= (6/5) \\ s_1 + s_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

و إذا نظرنا إلي القيود في (3) نجد أنها قد تحولت إلي قيود جديدة كما في (6) وذلك نتيجة لإستخدام طريقة الحذف لـ(جاوس – جوردن) (أنظر إلي بداية المسألة)، أي أن المسألة أصبحت أسهل ، وبإحلال هذه القيود من الموديل رقم (6) بدلا من القيود في الموديل رقم (1) فنحصل علي الموديل التالي:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Minimize } Z = 4x_1 + x_2 \\ &\text{S.T.} \\ &x_1 + (1/5)\, s_1 = (3/5) \\ &x_2 - (3/5)\, s_2 = (6/5) \\ &s_1 + s_2 = 1 \end{aligned}\right\} \quad (7) \qquad \& \; x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0$$

ومن القيود في الموديل (7) نحصل علي $x_1 = -(1/5)\, s_1 + (3/5$ ،

$$x_2 = (3/5)\, s_2 + (6/5)$$

وبالتعويض عن قيمتي x_1, x_2 السابقتين في معادلة دالة الهدف بالموديل رقم (7) فنحصل علي دالة الهدف

$$\text{Minimize } Z = -(1/5)\, s_1 + 18/5$$

وعليه يصبح موديل (7) كالتالي

$$\left.\begin{aligned} &\text{Minimize } Z + (1/5)\, s_1 + 18/5 \\ &\text{S.T.} \\ &x_1 + (1/5)\, s_1 = (3/5) \\ &x_2 - (3/5)\, s_2 = (6/5) \\ &s_1 + s_2 = 1 \end{aligned}\right\} \quad (8) \qquad \& \; x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0$$

وبوضح الموديل رقم (8) في جدول السمبلكس كالتالي:

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	الحد المطلق
	1	0	0	1/5	0	18/5
x_1		1	0	1/5	0	3/5
x_2		0	1	-3/5	0	6/5
S_2		0	0	1	1	1

لتكملة الحل (حيث انه توجد قيمة موجبة (1/5) ضمن معاملات دالة بالجدول، أي أننا لم نصل للحل)، إذا لابد أن تتحول هذه القيمة الموجبة إلي الصفر. ولذا الجدول السابق يحتاج مرة أخري لتطبيق طريقة الحذف لجاوس – جوردن، بعد تحديد عمود وصف وعنصر الإرتكاز ،ثم بتحويل جميع عناصر عمود الإرتكاز للصفر إلا عنصر الإرتكاز)، ويكون العنصر الخارج هو S_2 ليحل محله العنصر الداخل (S_1) كالتالي:

$3/5 * (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$ وجمعه علي الصف الثاني بالجدول

$-1/5 * (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$ وجمعه علي الصف الأول بالجدول

وجمعه علي صف معاملات دالة الهدف بالجدول $-1/5 * (0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$ فيصبح الجدول كالتالي

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	الحد المطلق
	1	0	0	0	-1/5	17/5
x_1		1	0	0	-1/5	2/5
x_2		0	1	0	3/5	9/5
S_1		0	0	1	1	1

إذا الحل قد إكتمل بعد أن أصبحت جميع معاملات دالة الهدف صفر أو قيم سالبة.
والحل كما هو مبين بالجدول السابق كالتالي: $x_1 = 2/5$ ، $x_2 = 9/5$ ، وبالتعويض عنهما في دالة الهدف بالموديل رق (1) أي : $Z = 4x_1 + x_2$ نحصل علي $Z= 4(2/5) + 9/5 = 17/5$ وهي نفس القيمة الموجودة تحت الحد المطلق بالجدول (الحل انتهي .....أخيرا)

==

المثال التالي محلول بإختصار وللتمرين

Que. No.ii – Find the optimal solution (numerically) for the next LPP;:

$$\text{Minimize } Z = x_1 - 2x_2$$
$$\text{S.t. } -x_1+x_2 \geq 1,$$
$$x_1+x_2 \geq 2,$$
$$x_2 \leq 3 \qquad \& \ x_1, x_2 \geq 0 .$$

The answer of (Que. No.ii-
By using the two-Phase method the model becomes as follows:
موديل المرحلة الأولي يصبح

$$\text{Minimize } r = R_1 + R_2$$
$$\text{S.T. } -x_1 + x_2 - S_1+R_1= 1 ,$$
$$x_1 + x_2 - S_2+R_2 = 2 ,$$
$$x_2 + S_2 = 3 \qquad \& \ x_1, x_2, S_1, S_2, , S_3, R_1, R_2 \geq 0$$

ويصبح جدول الحل للمرحلة الأولي كالتالي

The final table of solution for the Phase I is

	r	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	R_1	R_2	الحد المطلق
	1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**-1**	0
X_1		1	0	-1/2	1/2	0	1/2	-1/2	1/2
X_2		0	1	-1/2	-1/2	0	1/2	1/2	3/2
S_3		0	0	1/2	1/2	1	-1/2	-1/2	3/2

وطالما أن القيمة المطلقة = 0 بالجدول ، إذا للمسألة حل ، وعليه نذهب للمرحلة الثانية ونستخدم طريقة السمبلكس بعد الإستغناء عن المتغيرات الصناعية وتكوين جدول جديد وإستخدام طريقة جاوس-جوردن كما سبق لنحصل علي جدول الحل كالتالي:

After starting PhaseII , the final table of solution for the Phase II is:

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	الحد المطلق
	1	**-1**	**0**	**0**	**0**	**-2**	- 6
S_2		1	0	0	1	1	2
X_2		0	1	0	0	1	3

S_1		-1	0	1	0	1	1

Then the optimal solution is Minimize $Z_x = x_1 - 2x_2 = -6$ at $x_1 = 0$, $x_2 = 3$,

المسألة محلولة بطريقة مختصرة ويلزم حلها بنفسك للتدريب وللحصول علي التفاصبل مهتديا بخطوات المسألة السابقة