# حل مسائل (التخصيص) (Assignment Problems)

**تعريف بمسائل النقل:**

حل مسائل التخصيص هو تطبيق خاص لمسائل النقل الذي هو تطبيق مباشر لنوعية المسائل الخطية الغير كسرية (الصحيحة) ولها موديل رياضي خطي لكن يصعب حلها بالطرق اليدوية ويلزم استخدام الحاسب لكثرة القيود بها كالتالي :

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\ X_{ij}$$

S.T.

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1 \text{ , } i = 1.2\ldots., n \quad \text{(قيود مصادر الإنتاج)}$$

$$\sum_{I=1}^{n} X_{ij} = 1 \text{ , } j = 1,2, \ldots, n \quad \text{(قيود اماكن التوزيع)}$$

$$X_{ij} = 0 \text{ or } 1$$

وتبحث نماذج التخصيص في إيجاد طريقة لتوزيع عدد من الموارد (عمال، موظفين، أجهزه، شركلات، .....) علي عدد من الأنشطة (أعمال، وظائف، خدمات ، تعهدات، .....) بحيث تعطي عملية التوزيع أفضل عائد ممكن (أكبر ربح ممكن أو أقل تكلفة ممكنة. وتعمل هذه الطريقة بطرقة واحد إلي واحد

(one job for one person) ، فمثلا إذا أرنا بناء أحد المباني ، فيجب ألا نسندها لمقاول واحد (لتقليل التكلفة وتقليل زمن الإنتهاء من العمل ) ،أي نكلف أعمال الحفر لمقاول (أ) ،ثم نكلف أعمال الخرسانة لمقاول آخر (ب)، وأعمال بناء الحوائط لمقاول ثالث (ج) ، وهكذا لباقي الأعمال ..... ( علي أن تكون تكلفة هذه الأعمال الأرخص ( أي إذا تقدم عدد من المقاولين لعمل الحفرمثلا فيجب أن نختار الأرخص من بينهم)

## الطرقة الهنجارية (Hungarian algorithm) لمسائل التخصيص:

في المثال التالي أنه لدي مدرب سباحة عدد أربعة من السباحين ويريد أن يتقدم بهم للمنافسة بإحدي البطولات،

فيجب عليه بعد التدريب أن يدخلهم في مسابقات لسباحات (الظهر)، الصدر والفرلشة ثم السباحة الحرة. وبعده يسجيل إسم المتسابق الأول (المستهلك لأقل وقت في إنجاز السباق) لكل نوع من السباحات السابقة ، وإليكم هذا المثال كالتالي باللغة الإنجليزية

(Que. No. 1 - 400-meter medley relay involves four different swimmers, who successively swim 100 meters of the backstroke, breaststroke , butterfly, freestyle . A coach has six very fast swimmers whose expected times in seconds in the individual events are given in the next table . How should the coach assign swimmers to the relay so as to <u>minimize</u> (تصغير) the sum of their time.

| | Event 1 (Backstroke) | Event 2 (Breaststroke) | Event 3 (Butterfly ) | Event 4 (Freestyle) |
|---|---|---|---|---|
| Swimmer 1 | 30.4 | 25.3 | 26.4 | 28.2 |
| Swimmer 2 | 26.9 | 32.1 | 24.5 | 22.4 |
| Swimmer 3 | 20.8 | 22.2 | 18.9 | 27.6 |
| Swimmer 4 | 23.0 | 20.7 | 21.4 | 19.5 |

المعلومات معطاه عن الوقت بالثواني الذي يقضيها كل متسابق في كل نوع من أنواع السباحة في الجدول السابق ، والذي يسمي جدول خسارة الفرص الكلي، عندما تكون المسألة تصغير( أو المحولة من تكبير إلي تصغير في مسائل أخري):

**وتبدأ خطوات الطريقة الهنجارية كالتالي:**

i - لكل صف نطرح أقل قيمة فيه من كل القيم الموجودة به
ii – نكرر نفس عملية الطرح لكل عمود لا يحتوي علي أي قيمة صفرية
iii- بأقل عدد ممكن من الخطوط الخفيفة (أفقية أو رأسية) نغطي بها الصفوف والأعمدة التي بها أصفار،
(ولا تتقاطع عند خلية بها صفر) ويفضل أن نبدأ بتغطية الصفوف أو الأعمدة التي تحتوي علي عدد أكبر من الأصفار
iv- بعد تغطية الأصفار ، إذا عدد الخطوط المغطاه أقل من عدد الصفوف فيجب إذا أن نواصل خطوات الحل، وذلك بأخذ أصغر قيمة من قيم الأعداد الغير مغطاه ونطرحها من هذه القيم الغير مغطاه ، ثم نضيفها الي خلايا نقاط تقاطع الخطوط المغطية ثم نكرر تغطيه المصفوفة بخطوط جديدة

THE ANSWER of 1 : الجدول الأول من المسألة كالتالي

| | E1 | E2 | E3 | E4 |
|---|---|---|---|---|
| S 1 | 30.4 | 25.3 | 26.4 | 28.2 |
| S 2 | 26.9 | 32.1 | 24.5 | 22.4 |
| S 3 | 20.8 | 22.2 | 18.9 | 27.6 |
| S 4 | 23.0 | 20.7 | 21.4 | 19.5 |

After first iteration we will get ( بإستخدام الخطوة الأولي من الطريقة الهنجارية نحصل علي )

| | E1 | E2 | E3 | E4 |
|---|---|---|---|---|
| S 1 | 5.1 | 0 | 1.1 | 2.9 |
| S 2 | 4.5 | 9.7 | 2.1 | 0 |
| S 3 | 1.9 | 3.3 | 0 | 8.7 |
| S 4 | 2.5 | 1.2 | 1.9 | 0 |

After second iteration we will get (بإستخدام الخطوة الثانية من الطريقة الهنجارية نحصل علي )

| | E1 | E2 | E3 | E4 |
|---|---|---|---|---|
| S 1 | 3.2 | 0 | 1.1 | 2.9 |
| S 2 | 2.6 | 9.7 | 2.1 | 0 |
| S 3 | 0 | 3.3 | 0 | 8.7 |
| S 4 | 1.6 | 1.2 | 1.9 | 0 |

After third iteration we will get (بإستخدام الخطوة الثالثة من الطريقة الهنجارية نحصل علي )

| | E1 | E2 | E3 | E4 |
|---|---|---|---|---|
| S 1 | 3.2 | 0 | 1.1 | 2.9 |
| S 2 | 2.6 | 9.7 | 2.1 | 0 |
| S 3 | 0 | 3.3 | 0 | 8.7 |
| S 4 | 1.6 | 1.2 | 1.9 | 0 |

فنجد أن عدد الخطوط المغطية في الجدول السابق= 3 وهو لا تساوي عدد الصفوف أو الأعمدة (=4)، أي أن الحل لم يصبح إلي الآن نهائيا أو مثاليا، لذا نتجه للخطوة الرابعة

| | E1 | E2 | E3 | E4 |
|---|---|---|---|---|
| S 1 | 3.2 | 0 | 1.1 | 2.9 |
| S 2 | 2.6 | 9.7 | 2.1 | 0 |
| S 3 | 0 | 3.3 | 0 | 8.7 |
| S 4 | 1.6 | 1.2 | 1.9 | 0 |

إذا عند تطبيق الخطوة الرابعة بالجدول السابق ، نجد أن أصغر قيمة من الأعداد الغير مغطاه هي 1.2 ، إذا نطرحها من باقي القيم الغير مغطاه بالمصفوفة ونضيفها الي خلايا نقاط التقاطع ثم نعيد تغطية الصفوف والأعمدة بالمصفوفة ، فنحصل علي التالي

| | E1 | E2 | E3 | E4 |
|---|---|---|---|---|
| S 1 | 3.2 | 0 | 1.1 | 4.1 |
| S 2 | 1.4 | 8.5 | 0.9 | 0 |
| S 3 | 0 | 3.3 | 0 | 9.9 |
| S 4 | 0.4 | 0.0 | 0.7 | 0 |

بالنظر إلي آخر مصفوفة سابقة نجد أن أقل عدد من الخطوط التي تغطي الأصفار = 3 وهي لا تساوي عدد الصفوف أو الأعمدة ، اذا إلي الآن لم نصل للحل الأمثل ، لذا نكرر الخطوة السابقة مرة أخري ، أي أننا في المصفوف التالية نجد أن القيم الغير مغطاه موجوده باللون الأحمر وأصغرها القيمة 0.4. ، فنقوم بطرحها من القيم الأخري الحمراء ونضيفها للقيم (الخضراء) خلايا نقطتي تقاطع خطوط التغطية

| | E1 | E2 | E3 | E4 |
|---|---|---|---|---|
| S 1 | 3.2 | 0 | 1.1 | 4.1 |
| S 2 | 1.4 | 8.5 | 0.9 | 0 |
| S 3 | 0 | 3.3 | 0 | 9.9 |
| S 4 | 0.4 | 0.0 | 0.7 | 0 |

وبعد إجراء ما سبق علي المصفوفة السابقة ، سنحصل علي المصفوفة التالية ، ثم نكرر عملية تغطية الأصفار بخطوط خفيفة فنحصل علي:

| | E1 | E2 | E3 | E4 |
|---|---|---|---|---|
| S 1 | 2.8 | 0 | 0.7 | 4.5 |
| S 2 | 1.0 | 8.5 | 0.5 | 0 |
| S 3 | 0 | 3.3 | 0 | 10.3 |
| S 4 | 0 | 0 | 0.3 | 0 |

إذا في المصفوف السابقة نجد أنه لايمكن تغطية أصفار المصفوفة بعدد أقل من 4 خطوط = عدد الصفوف،

الآن نستطيع أن نقول بأننا قد وصلنا للحل الأمثل الذي سنحصل عليه بتحديد خلاياه بأصفار ملونة، وهذه الأصفار الملونة تدلنا علي أن خلاياه هي التي سنأخذ القيم الموجودة بها بأول مصفوفة بالمسألة

} علي نأخذ في الإعتبار أن إختيار وتلوين الأصفار لتكون من الحل ، يلغي كل الأصفار الموجودة معه بنفس الصف أو العمود (حيث أن تلوين الصفر بالصف الأول يعني أن السباح رقم S1 سيخوض السباحة من النوع الثاني E2، وبذلك نلغي الصفر الأخر في نفس العمود بالصف الرابع "السباح الرابع"والذي سيخوض السباحة من النوع الأول رقم E1) { ثم نجمع جميع هذه الأوقات لنحصل علي أصغر وقت ممكن في مسابقة السباحة المنشودة

| | E1 | E2 | E3 | E4 |
|---|---|---|---|---|
| S 1 | 2.8 | 0 | 0.7 | 4.5 |
| S 2 | 1.0 | 8.5 | 0.5 | 0 |
| S 3 | 0 | 3.3 | 0 | 10.3 |
| S 4 | 0 | ~~0~~ | 0.3 | ~~0~~ |

The final solution is Min $z = S_1E_2 + S_2E_4 + S_3E_3 + S_4E_1$
$= 25.3 + 22.4 + 18.9 + 18.9 + 23.0 = 89.6$ s

مثال في حالة أن الدالة MAX

في هذه الحالة يجب تحويل المسألة إلي MIN بأحد المسلكين، ثم نستخدم الطريقة الهنجارية للحل

1- المسلك الأول : ضرب كل أعداد المصفوفة في القيم السالبة (1-) فتتحول دالة الهدف ( المسألة) إلي تصغير

2- المسلك الثاني : نبحث عن أكبر قيمة بالمصفوفة ، ثم نقوم بطرحها من جميع قيم المصفوفة فتتحول دالة الهدف ( المسألة) إلي تصغير

المثال التالي تطبيق بإستخدام المسلك الثاني الذي يتناول تشغيل ووضع مندوبي مبيعات في الأماكن التي يحصلون فيها علي أعلي كمية مبيعات:

Que. No. 2–A Company have five sales territories, each of which must be assigned a sales representative. From the past experience firm's, sales manager has estimated the sales volume for each sales representative in each sales territory. Find the sales representative-territory assignments that will maximize sales (in the next table data given in thousands).

| sales representative | sales territories | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Menya | Cairo | Sohag | Aswan | Alex. |
| Bahey | 23 | 16 | 17 | 18 | 13 |
| Gmal | 25 | 22 | 19 | 17 | 20 |
| Osama | 22 | 25 | 23 | 19 | 22 |
| Reda | 24 | 21 | 22 | 29 | 19 |
| Samy | 18 | 15 | 23 | 14 | 16 |

The Answer of Que. No.4(B)(i)

The problem is *maximize* sales: we will get the difference between the largest cell value in the matrix (=29) and all other cells ,then the table becomes

في هذا المثال نجد أن أكبر قيم في المصفوفة هي 29

| Sales Representative | Sales Territories | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Menya | Cairo | Sohag | Aswan | Alex. |
| Bahey | 6 | 13 | 12 | 11 | 16 |
| Gmal | 4 | 7 | 10 | 12 | 9 |
| Osama | 7 | 4 | 6 | 10 | 7 |
| Reda | 5 | 8 | 7 | 0 | 10 |
| Samy | 11 | 14 | 6 | 15 | 13 |

The problem is now becomes *minimizing* , so, after subtracting the minimum value in every row, the table becomes as follows

| | Sales Territories | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Sales Representative | Menya | Cairo | Sohag | Aswan | Alex. |
| Bahey | 0 | 7 | 6 | 5 | 10 |
| Gmal | 0 | 3 | 6 | 8 | 5 |
| Osama | 3 | 0 | 2 | 6 | 3 |
| Reda | 5 | 8 | 7 | 0 | 10 |
| Samy | 5 | 8 | 0 | 9 | 7 |

the table becomes after subtracting the minimum value in every column and covering all zeros
with light lines :

| | Sales Territories | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Sales Representative | Menya | Cairo | Sohag | Aswan | Alex. |
| Bahey | 0 | 7 | 6 | 5 | 7 |
| Gmal | 0 | 3 | 6 | 8 | 2 |
| Osama | 3 | 0 | 2 | 6 | 0 |
| Reda | 5 | 8 | 7 | 0 | 7 |
| Samy | 5 | 8 | 0 | 9 | 4 |

The solution still is not ideal so, we will subtracting the minimum value uncovered number from all other uncovered number and recovering all zeroswith light lines which is 5 lines : , then the table becomes

| | Sales Territories | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Sales Representative | Menya | Cairo | Sohag | Aswan | Alex. |
| Bahey | 0 | 5 | 4 | 3 | 5 |
| Gmal | 0 | 1 | 4 | 6 | 0 |
| Osama | 3 | 0 | 2 | 6 | 0 |
| Reda | 5 | 8 | 7 | 0 | 7 |
| Samy | 5 | 8 | 0 | 9 | 4 |

| | Sales Territories | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Sales Representative | Menya | Cairo | Sohag | Aswan | Alex. |
| Bahey | √ (0) | 5 | 4 | 3 | 5 |
| Gmal | ~~(0)~~ | 1 | 4 | 6 | √ (0) |
| Osama | 3 | √ (0) | 2 | 6 | ~~(0)~~ |
| Reda | 5 | 8 | 7 | √ (0) | 7 |
| Samy | 5 | 8 | √ (0) | 9 | 4 |

The solution now is optimal so,

Max z = Bahey (Menya) + Gmal ( alex) + Osama (Cairo) + Reda (Aswan) + Samy (Sohag)

= 23 +20 + 25 + 29 + 23= 120

Que. No. 3–Solve the assignment problem for which the cost matrix is follows and with objective to maximize

| Jobs / Persons | $J_1$ | $J_2$ | $J_3$ | $J_4$ | $J_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | 15 | 13 | 14 | 17 | 11 | الجدول الاول |
| $P_2$ | 12 | 13 | 17 | 16 | 15 | |
| $P_3$ | 14 | 11 | 15 | 12 | 14 | |
| $P_4$ | 16 | 18 | 11 | 12 | 13 | |
| $P_5$ | 14 | 12 | 15 | 17 | 11 | |

]Que. No. 4 –Solve the assignment problem for which the cost matrix is below And with objective to minimize

| Jobs / Persons | $J_1$ | $J_2$ | $J_3$ | $J_4$ | $J_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | 15 | 13 | 14 | 17 | 11 |
| $P_2$ | 12 | 13 | 17 | 16 | 15 |
| $P_3$ | 14 | 11 | 15 | 12 | 14 |
| $P_4$ | 16 | 18 | 11 | 12 | 13 |
| $P_5$ | 14 | 12 | 15 | 17 | 11 |