حل المسالة البرمجة الخطية التالية عدديا

A - Find the optimal solution, numerically, for the next linear prog. Problem (LPP):

Maximize $Z = 4x_1 + x_2 + 3x_3$

Subject to $(2x_1+x_2+x_3 \le 2)$, $(x_1+2x_2+3x_3 \le 5)$,

$(2x_1+2x_2+x_3 \le 6)$ and $x_1, x_2, x_3 \ge 0$.

(B) -Write the Dual Model, and find Dual M. solution from the table of Primal Model solution

----

The Answer of Que. No (A)

الحل:1- نوع المسالة تكبير اي لها نهاية عظمي ومكونة من 3 متغيرات لا يصلح لها الحل البياني

2 – القيود كلها اقل من ($\le$) ، اذا يجب استخدام طريقة السمبلكس

3 – نحوٌل كل متباينات القيود الي متساويات بإضافة متغير موجب لكل قيد يسمي متغير زائد (slack varaible) وهي $s_1, s_2, s_3 \ge 0$

ثم نضيف هذه المتغيرات الزائدة الي دالة الهدف مضروبة في 0، ثم نجعل دالة الهدف صفرية، اي ان كل الحدود تكون بجانب Max Z_x, فيصبح الموديل الاولي (Primal Model) كالتالي :

$$\text{Max } Z_x - 4x_1 - x_2 - 3x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 = 0$$

$$\text{S.t.} \quad (2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2),$$

$$(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_2 = 5),$$

$$(2x_1 + 2x_2 + x_3 + s_3 = 6), \quad \text{and} \quad s_1, s_2, s_3, x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

وعليه يجب ان جميع المتغيرات موجبة ، ثم نكون جدول السمبلكس التالي وهو عبارة عن:

1 – الصف الاول عبارة عن متغيرات دالة الهدف السابقة

2-– الصف الثاني عبارة عن معاملات المتغيرات لدالة الهدف السابقة

3- نضع المتغيرات s_1, s_2, s_3 في العمود الاول ونجد ان الجدول مكون من مصفوفتين اليسار منهما لمعاملات القيود (A) والاخري هي مصفوفة الوحدة (I)، والعمود الاخير هو معاملات الحد المطلق للقيود وكل ذلك مبين كما هو موجود بجدول (1)

the first table								
	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	الحد المطلق
		- 4	-1	-3	0	0	0	0
s_1		2	1	1	1	0	0	2
s_2		1	2	3	0	1	0	5
s_3		2	2	1	0	0	1	6

جدول (1)

4- نبدأ الحل طالما ان احدي قيم معاملات دالة الهدف سالبة (ذلك في حالة المسألة Max) ، وعليه نختار أكبر قيمها سالبية في جدول (1) وهي (-4) تحت المتغير x_1 وعليه يكون عموده هو العمود المختار ويسمي عمود الارتكاز وملون بالجدول (2) باللون الاحمر ويسمي x_1 بالعنصر الداخل ويوضع مكان s_1 كما بالجدول (2) ويسمي العنصر s_1 بالعنصر الخارج

5 – ولتحديد صف الارتكاز في جدول (1) نقوم بقسمة معاملات الحد المطلق علي معاملات عمود الارتكاز بالتقابل ونختار اقل القيم الناتجة (ونستبعد السالب منها وكذلك المالانهاية) وهي (2/2 ، 1/ 5، 6/2) ، وعليه فان الصف الاول(باللون الاخضر) هوالان صف الارتكاز وعنصر التقاطع بين صف وعمود الارتكاز يسمي عنصر الارتكاز وهو العدد (2) الموجود داخل المربع وذلك موضح بجدول (2)

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	الحد المطلق

		- 4	-1	-3	0	0	0	0
x_1		$\boxed{2}$	1	1	1	0	0	2
s_2		1	2	3	0	1	0	5
s_3		2	2	1	0	0	1	6

جدول (2)

6 – (أ)- نبدأ خطوات الحل بقسمة عناصر صف الارتكاز علي عنصر الارتكاز فيصبح جدول(2) كالتالي

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	الحد المطلق
		- 4	-1	-3	0	0	0	0
x_1		$\boxed{1}$	1/2	1/2	1/2	0	0	1
s_2		1	2	3	0	1	0	5
s_3		2	2	1	0	0	1	6

جدول (3)

(ب)- نستخدم طريقة جاوس–جوردن للحذف في التعامل مع مصفوفتي {الجدول (3)} A & I وتنص هذه الطريقة علي انه اذا تم ضرب اي معادلة خط من مجموعة خطوط مستقيمة بعدد ما فإن حل هذه المجموعة لا يتاثر، وباستخدام هذه الخاصية سيتم جعل المصفوف (A) تتحول الي مصفوفة الوحدة (I) بالتقريب اي ان (A)(I) $\Longleftarrow$ (I) (A^{-1}) ، <u>ونلخص ذلك في الخطوات التالية:</u>

(i)- نحول عناصر عمود الارتكاز(الملون باللون الاحمر ما عدا عنصر الارتكاز) الي القيمة 0 ، اولا نبدأ بالقيمة (-4) بالجدول (3) احدي قيم معاملات دالة الهدف وعمود الارتكاز تتحول الي الصفر وذلك بضرب معاملات صف الارتكاز بالعدد (4) ثم نجمعها مع مقابلها من معاملات دالة الهدف ونضعها مكان قيم معاملات دالة الهدف في الجدول (3) فتصبح

	4 (	$\boxed{1}$	1/2	1/2	1/2	0	0	1)
+	(- 4	-1	-3	0	0	0	0)	
=	**(0**	**1**	**-1**	**2**	**0**	**0**	**4)**	

ثم نضع الناتج الموجود داخل المستطيل بالجدول(4)

(ii)-اماالقيمة (1) وهي القيمة الثالثة من عمود الارتكاز بجدول (3) فيجب ان تتحول الي 0 كالتالي: وذلك بضرب معاملات صف الارتكاز بالعدد (-1) ثم جمعها مع مقابلها من معاملات القيد الثاني ونضعها مكان قيم معاملات القيد الثاني في الجدول (3) فتصبح

	-1 (	$\boxed{1}$	1/2	1/2	1/2	0	0	1)
+	(1	2	3	0	1	0	5)	
=	(0	1.5	2.5	-0.5	0	0	4)	

ثم نضع الناتج الموجود داخل المستطيل بالجدول (4)

(iii)- اماالقيمة (2) وهي القيمة الرابعة من عمود الارتكاز بجدول (3) فيجب ان تتحول الي الصفر كالتالي وذلك بضرب معاملات صف الارتكاز بالعدد (-2) ثم جمعها مع مقابلها من معاملات القيد الثالث ونضعها مكان قيم معاملات القيد الثالث في الجدول(3) فتصبح

	-2 (	$\boxed{1}$	1/2	1/2	1/2	0	0	1)
+	(2	2	1	0	0	1	**6)**	
=	(0	1	0	-1	0	1	4)	

ثم نضع الناتج الموجود داخل المستطيل بالجدول (4)

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	الحد المطلق

		0	1	-1	2	0	0	4
x_1		1	1/2	1/2	1/2	0	0	1
s_2		0	1.5	2.5	-0.5	1	0	4
s_3		0	1	0	-1	0	1	4

جدول (4)

(ج)-(I) من جدول (4) نلاحظ ان معاملات دالة الهدف ليست كلها سالبة ، اذاً الي الآن لم نصل الي الحل الامثل، لذا لا بد من تكرار نفس الخطوات السابقة في (أi, ii , iii) من (ب).

*** ولتحديد عمود الارتكاز ، فهوالعمود الملون باللون الاحمر تحت العدد السالب الوحيد $\boxed{-1}$ كما هو بجدولي (4،5)**

**** ولتحديد صف الإرتكاز وذلك بان نقسم معاملات عمود الحد المطلق علي معاملات عمود الارتكاز بجدول (4) فنختار اقل قيم ناتج القسمة وهي التي تشير للصف (صف الإرتكاز) امام s_2 , وعليه s_2 يسمي العنصر الخارج الثاني بعد ان يحل محله العنصر الداخل الثاني x_3 كما هو مذكور بالجدول(5) ، وبناءا عليه نجد ان عنصر الإرتكاز الجديد هو $\boxed{2.5}$**

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	الحد المطلق
		0	1	$\boxed{-1}$	2	0	0	4
x_1		1	1/2	1/2	1/2	0	0	1
x_3		0	1.5	$\boxed{2.5}$	-0.5	1	0	4
s_3		0	1	0	-1	0	1	4

جدول (5)

(II)- ولتكرار الخطوات السابقة نبدأ بقسمة معاملات صف الإرتكاز علي عنصر الإرتكاز $\boxed{2.5}$ ، ثم تكرار نفس الخطوات السابقة في (أi, ii , iii) من (ب) فنحصل علي الجدول رقم (6) التالي

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	الحد المطلق
		0	1.4	0	$\boxed{1.8}$	$\boxed{0.4}$	$\boxed{0}$	$\boxed{5.6}$
x_1		1	0.2	0	0.6	-0.2	0	$\boxed{0.2}$
x_3		0	0.6	1	-0.2	0.4	0	$\boxed{1.6}$
s_3		0	1	0	-1	0	1	4

جدول (6)

للتأكد من الحل : نعوض من الجدول السابق في دالة الهدف عن قيم المتغيرات والتي هي الحل

***the* solution is $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1.6$**

فنجد ان القيمة العظمي لدالة الهدف هي قيمة الحد المطلق كما بالجدول(6) ومن دالة الهدف كالتالي

with Maximum Zx $= 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 * \boxed{0.2} + 0 + 3 * \boxed{1.6} = 5.6$

****

حل الجزء الثاني - ---- The Answer of Que. No. (B)

لإيجاد *النموذج المترافق* من رأس المسألة نسمي الموديل الرياضي التالي بالموديل الاولي

Primal Model

الصورة المصفوفية المختصرة للموديل الاولي

Max $Z = 4x_1 + x_2 + 3x_3$

$$\text{S. to } (2x_1+x_2+x_3 \le 2),\ (x_1+2x_2+3x_3 \le 5),\ (2x_1+2x_2+x_3 \le 6) \text{ and } x_1, x_2, x_3 \ge 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Max } Z_x = \underline{C} \,.\, \underline{X} \\ \text{s.t} \\ \underline{A} \,.\, \underline{X} \le \underline{B} \\ \underline{X} \ge \underline{0}. \end{array} \right\}$$

حيث ان : $\underline{C}$ هي مصفوفة معاملات دالة الهدف كمتجه

$\underline{B}$ هي مصفوفة معاملات الحدود المطلقة للقيود كمتجه،

$\underline{A}$ هي مصفوفة معاملات القيود كمتجه،

$\underline{X}$ هو مصفوفة مركبات المتغير كمتجه

وللحصول علي النموذج المترافق **Dual Model** نبيع العلاق التالية التي تعطي صورة النموذ المترافق:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Min } Z_y = \underline{B} \,.\, \underline{Y} \\ \text{s.t} \\ \underline{\acute{A}} \,.\, \underline{Y} \ge \underline{C} \\ \underline{Y} \ge \underline{0} \end{array} \right\} \Longleftarrow$$

الصورة المصفوفية المختصرة للنموذج المترافق

حيث ان $\acute{A}$ هي مدور المصفوفة **A**

**ولتطبيق ذلك نقوم بالتالي:

أ – لكل قيد في الموديل الاولي نضربه في مكونات المتغير المترافق $y_1, y_2, y_3 \ge 0$ كالتالي

$$\left. \begin{array}{l} y_1 \,.\, (2x_1 + 1x_2 + 1x_3 \le 2), \\ y_2 \,.\, (1x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 5), \\ y_3 \,.\, (2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \le 6) \end{array} \right\} \text{(const. P.M.)}$$

ب- لمجموعة القيود السابقة **(const. P.M)** نختار معاملات x_1 مضروبة في المتغيرات المترافقة y_1, y_2, y_3 ونضعها في معادلة كالتالي

$$*** \quad \boxed{(2y_1+y_2+2y_3 \ge 4)}$$

حيث ان الحد المطلق **4** هو معامل x_1 بدالة الهدف للموديل الاولي

وبالمثل نؤدي نفس الفعل مع معاملات x_2 لنحصل علي التالي

$$** \quad \boxed{(y_1+2y_2+2y_3 \ge 1)}$$

حيث ان الحد المطلق **1** هو معامل x_2 بدالة الهدف للموديل الاولي

وكذلك نؤدي نفس الفعل مع معاملات x_3 لنحصل علي التالي

$$\boxed{(y_1+3y_2+y_3 \ge 3)}$$

حيث ان الحد المطلق **3** هو معامل x_3 بدالة الهدف للموديل الاولي

ج – ولتكوين دالة الهدف للنموذج المترافق نضرب معاملات الحد المطلق لمعادلات القيود **(const. P.*M*)** في مركبات المتغير المترافق y_1, y_2, y_3 بالتقابل وتكون كالشكل التالي

$$\text{Minimum } Zy = 2y_1 + 5y_2 + 6y_3$$

وعليه يأخذ <u>النموذج المترافق</u> الشكل التالي

$$\boxed{\text{The Dual Model}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimum } Z_y = 2y_1 + 5y_2 + 6y_3 \\ \quad \text{S.t. } (2y_1+y_2+2y_3 \ge 4), \\ \quad (y_1+2y_2+2y_3 \ge 1), \\ \quad (y_1+3y_2+y_3 \ge 3) \text{ and } y_1, y_2, y_3 \ge 0. \end{array} \right\} \text{(const. D.M.)}$$

د – وللتأكد من انه بمكننا ان نحصل علي حل للنموذج المترافق وذلك بالاستعادة بجدول الحل النهائي اي من جدول **(6)** نستخدم القيم الموجودة اسفل المتغيرات s_1, s_2, s_3 ونضع قيمها كالتالي

$$y_1 = s_1 = \boxed{1.8}, \quad y_2 = s_2 = \boxed{0.4}, \quad y_3 = s_3 = \boxed{0}$$

$$\Rightarrow \text{Min } Z_y = 2y_1 + 5y_2 + 6y_3 = 2*1.8 + 0.4*5 + 0*6 = 5.6 = \text{Max } Z_x$$

وهذا يثبت ان الحل الامثل يمكن ان نحصل عليه من النموذجين علي العموم

****