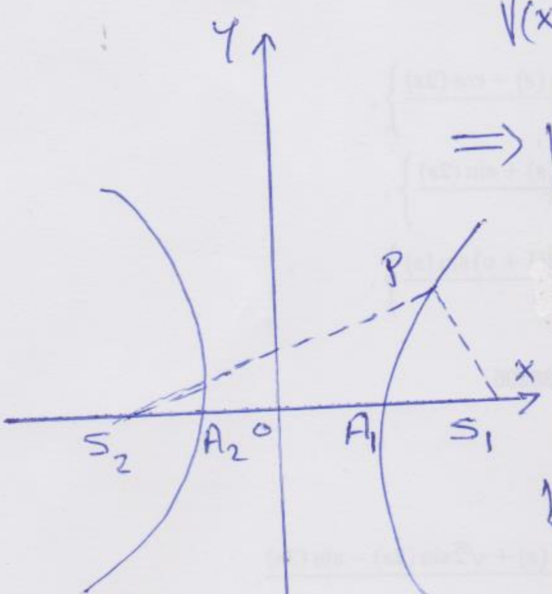
القطع الزائد

تعريف : هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوي بحيث يكون الفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقدار ثابت $= 2a$. تسمى النقطتان الثابتتان بؤرتي القطع.

الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد

حسب تعريف القطع ومن الشكل يكون



$$PS_2 - PS_1 = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\Longrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

وبتربيع الطرفين والاختصار نحصل

معادلة القطع $\boxed{1}$ $\quad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

ويلاحظ هنا أن $b^2 = c^2 - a^2 \,,\; c > a$

$$\frac{c}{a} = e$$

ومنحنى القطع الزائد متماثل بالنسبة للمحورين ox , oy كما أن القطع الزائد لا يقطع المحور oy وأيضاً منحنى القطع متماثل حول مركزه.

الوتر البؤري العمودي: يسمى الوتر المار بالبؤرة عمودياً على المحور القاطع بالوتر البؤري العمودي.

لاحظ أن $b^2 = a^2(e^2-1) \,,\; e > 1$

بالنسبة للمعادلة $\boxed{1}$ نلاحظ أن

إحداثيات البؤرتين $S(\pm c, 0) = (\pm ae, 0)$

إحداثيات الرأسين $A(\pm a, 0)$

مركز القطع $O(0,0)$

معادلة الدليلين $x = \pm \frac{a}{e}$

طول الوتر البؤري العمودي $2L = \frac{2b^2}{a}$

طول المحور القاطع $= 2a$ وطول المحور المرافق $= 2b$

* وإذا وقعت بؤرتى القطع على محور الصادات فإن معادلته تأخذ الصورة

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad \boxed{2}$$

من هذه المعادلة يلاحظ أن

إحداثيات البؤرتين $S(0, \pm c)$ ، إحداثيات الرأسين $A(0, \pm a)$

مركز القطع $O(0,0)$ ، معادلة الدليلين $y = \pm \frac{a}{e}$

طول الوتر البؤري العمودي $2L = \frac{2b^2}{a}$

طول المحور القاطع $= 2a$ وطول المحور المرافق $= 2b$

* إذا إزيحت نقطة الأصل (مركز القطع) إلى نقطة جديدة ولتكن (α, β)

فإن معادلة القطع تأخذ الصورة

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

وإذا كان المحور المستعرض موازيا للمحور الرأسى (محور Y) فإن

معادلة القطع هى

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$$

معادلة المماس والعمودى لقطع زائد

بنفس الطريقة التي أوجدنا بها معادلة المماس والعمودي للقطع المكافئ والقطع الناقص عليه إيجاد معادلة المماس والعمودي لقطع زائد

حيث معادلة المماس للقطع الزائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ عند النقطة (x_1,y_1)

تعطى من

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$$

ومعادلة العمودي هي

$$\frac{x-x_1}{x_1/a^2}-\frac{y-y_1}{y_1/b^2}=0$$

الخطان التقاربيان للقطع الزائد

الخط التقاربي هو مستقيم يقطع المنحنى في ما لا نهاية في نقطتين منطبقتين، وللقطع الزائد خطان تقاربيان عليه إيجادهما كالتالي:

نفرض أن معادلة الخط المستقيم هي:

$$y=mx+c \quad (1)$$

وبالتعويض بها في معادلة القطع الزائد نحصل على معادلة من الدرجة الثانية في x وهذه المعادلة لها جذران لا نهائيان عندما يكون مميزها = صفر ويسفر ذلك عن $c=0$ ؛ $m=\pm\frac{b}{a}$ (2)

أي أن للقطع الزائد خطان تقاربيان بعد التعويض من (2) في (1) وهما

$$y=\frac{b}{a}x \quad ; \quad y=-\frac{b}{a}x$$

وهما خطان مستقيمان يمران بنقطة الأصل.

وتعطى المعادلة المشتركة للخطين من

$$\left(y-\frac{b}{a}x\right)\left(y+\frac{b}{a}x\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

وهي تختلف عن معادلة القطع الزائد في الحد الثابت.

* إذا كان محور Y هو المحور المستعرض للقطع أي إذا كانت معادلة القطع على الصورة

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

فإن الخطان التقاربيان هما $Y=\pm\frac{a}{b}x$

وللمعادلة

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

الخطان هما

$$(y-\beta)=\pm\frac{b}{a}(x-\alpha)$$

وإذا كانت معادلة القطع على الصورة

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$$

فإن الخطان التقاربيان هما

$$(y-\beta)=\pm\frac{a}{b}(x-\alpha)$$

القطع الزائد القائم

إذا كان الخطان التقاربيان لقطع زائد متعامدين، عندئذ يسمى القطع الزائد بالقطع الزائد القائم.

وحيث أن الخطان التقاربيان للقطع الزائد هما $Y=\pm\frac{b}{a}x$

ويتعامد الخطان التقاربيان إذا كان

$$\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)=-1 \Longrightarrow a^2=b^2$$

وتصبح معادلة القطع الزائد القائم في الصورة

$$x^2-y^2=a^2$$

وأحيانا يسمى القطع الزائد القائم بالقطع الزائد المتساوي.

وذلك لتساوي قيمتي a, b .

ويقال كذلك للقطع الزائد أنه قطع زائد قائم إذا تساوى طول المحور القاطع مع طول المحور المرافق

الاختلاف المركزي لقطع زائد قائم

نعلم أن العلاقة بين a, b ، e للقطع الزائد هي

$$b^2 = a^2(e^2 - 1)$$

وللقطع الزائد القائم يكون $a = b$

$$\Longrightarrow a^2 = a^2(e^2 - 1)$$

$$\Longrightarrow e^2 - 1 = 1 \Longrightarrow e^2 = 2 \Longrightarrow e = \sqrt{2}$$

القطع الزائد المرافق

إذا كانت معادلة القطع الزائد هي $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

فإن القطع الزائد المرافق له معادلته هي

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad or \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

وهي معادلة قطع زائد محوره القاطع هو محور الصادات ومحوره المرافق هو محور السينات ويكون طول محوره القاطع $2b$ وطول محوره المرافق $2a$.

أمثلة

مثال: أوجد إحداثيات البؤرتين ومعادلتي الدليلية للقطع الزائد

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

الحل

نكتب معادلة القطع المعطاة في صورة المعادلة القياسية للقطع وذلك بقسمة طرفي المعادلة على 144 فنحصل على

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

واضح أن مركز القطع هو نقطة الأصل ومحوره هو محور السينات من معادلة القطع

$$a^2=16 \;،\; b^2=9 \Rightarrow c^2=a^2+b^2=25$$

إحداثيات البؤرتين $(\pm c,0)=(\pm 5,0)$

أيضاً من العلاقة

$$b^2=a^2(e^2-1)$$

$$\Rightarrow 9=16(e^2-1) \Rightarrow e^2=\frac{25}{16} \Rightarrow e=\frac{5}{4}$$

$$x=\pm\frac{a}{e}=\frac{4}{5/4}=\pm\frac{16}{5}$$ معادلة الدليلين هما

<u>مثال</u>: أوجد الاختلاف المركزي وطول المحورين القاطع والمرافق وإحداثيات المركز والبؤرتين والرأسين ومعادلة الدليلين للقطع الزائد المعطى بالمعادلة

$$9x^2-4y^2+54x+8y+41=0$$

الحل

نضع المعادلة السابقة بحيث تأخذ إحدى الصور القياسية للقطع وذلك بالتربيع على الصورة

$$9(x^2+6x)-4(y^2-2y)+41=0$$

$$\Rightarrow 9(x+3)^2-4(y-1)^2+41-81+4=0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+3)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

وهذه المعادلة تمثل قطع زائد مركزه النقطة $(-3,1)$ ومحوره يوازي محور السينات ويكون

$$b^2 = a^2(e^2-1)$$

$$\Rightarrow 9 = 4(e^2-1) \Rightarrow e^2 = \frac{13}{4} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{13}}{2} > 1$$

طول المحور القاطع $= 2a = 4$

طول المحور المرافق $= 2b = 6$

$$\because c = ae \Rightarrow c = 2 \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}$$

إحداثيات البؤرتين هي $(\alpha \pm c, \beta) = (-3 \pm \sqrt{13}, 1)$

إحداثيات الرأسين $(\alpha \pm a, \beta) = (-3 \pm 2, 1)$

معادلة الدليلين هما

$$x = \alpha \pm \frac{a}{e} = -3 \pm \frac{4}{\sqrt{13}}$$

مثال: أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره هو محور Y ويمر بكل من النقطتين $(1,-3)$ ، $(4,6)$

الحل

من المعلومات المعطاة تكتب معادلة القطع على الصورة

$$\frac{Y^2}{a^2} - \frac{X^2}{b^2} = 1$$

القطع يمر بالنقطتين $(1,-3)$ ، $(4,6)$ لذا فهما يحققا معادلة القطع

$$\text{i.e.,} \quad \frac{36}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1 \quad , \quad \frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$$

ومن ذلك

$$a^2 = \frac{36}{5} \quad , \quad b^2 = 4$$

وبذلك تصبح معادلة القطع الزائد في الصورة

$$\frac{Y^2}{\frac{36}{5}} - \frac{X^2}{4} = 1$$

$$\Longrightarrow c^2 = a^2 + b^2 = \frac{36}{5} + 4 = \frac{56}{5}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{56}}{2\sqrt{5}} = \frac{\cancel{2}\sqrt{14}}{\cancel{2}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$$ وهذا

مثال: للقطع الزائد

$$\frac{(X+2)^2}{9} - \frac{(Y-1)^2}{16} = 1$$

أوجد المركز والإختلاف المركزي والخطان التقاربيان

الحل

من معادلة القطع نجد أن

$$a^2 = 9 \quad , \quad b^2 = 16$$

$$\Longrightarrow c^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\because \quad e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$$

مركز القطع هو النقطة

$$(\alpha, \beta) = (-2, 1)$$

الخطان التقاربيان هما

$$(Y - \beta) = \pm \frac{b}{a}(X - \alpha)$$

$$\text{i.e.,} \quad (Y-1) = \pm \frac{4}{3}(X+2)$$