أمثلة متنوعة

مثال: أوجد قيمة التكامل $\displaystyle\int \frac{\sec x\, dx}{\tan^2 x}$

الحل

$$\int \frac{\sec x\, dx}{\tan^2 x} = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\, dx$$

$$= \int (\sin x)^{-2} \cos x\, dx$$

$$= \frac{(\sin x)^{-2+1}}{-2+1} + c$$

مثال: أوجد قيم التكاملات

1- $\displaystyle\int x \tan^{-1} x\, dx$ 2- $\displaystyle\int x \ln \sqrt{x}\, dx$ 3- $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\, dx$

الحل

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int x \tan^{-1} x\, dx$ نستخدم التكامل بالتجزئ

Put $u = \tan^{-1} x$; $dv = x\,dx$

$\Downarrow$

$du = \dfrac{1}{1+x^2}\, dx$; $v = \displaystyle\int x\, dx = \frac{x^2}{2}$

$$\therefore \int x \tan^{-1} x\, dx = \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$$

والتكامل الأخير نُجامل هكذا

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{(x^2+1-1)\,dx}{x^2+1} = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2}$$

وعندئذ يكون التكامل الأصلي هو

$$\int x\tan^{-1}x\,dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$$

2- $\int x \,\mathrm{lin}\sqrt{x}\,dx$

نستخدم التكامل بالتجزيء فيكون

الحل

Put $u = \mathrm{lin}\sqrt{x}$; $dv = x\,dx$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \;;\; v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

$$\therefore \int x\,\mathrm{lin}\sqrt{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{lin}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{1}{2x}\,dx$$

$$\Longrightarrow \int x\,\mathrm{lin}\sqrt{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\mathrm{Lin}\sqrt{x} - \frac{1}{4}\int x\,dx$$

i.e., $\int x\,\mathrm{lin}\sqrt{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\left(\mathrm{Lin}\sqrt{x} - \frac{1}{4}\right) + c$

3- $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$

قواعد التكامل

الحل

نكتب التكامل على الصورة

$$\int \frac{(x^2-1+1-1)}{x^2+1}\,dx = \int \frac{(x^2+1)}{x^2+1}\,dx - \int \frac{2}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int dx - 2\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx = x - 2\tan^{-1} x + c$$ ※

التكامل المحدود

نعرف التكامل المحدود بأنه العدد الوحيد I الذي تجزئ P للفترة المغلقة $[a,b]$ ونرمز له بالرمز

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

مثال: اوجد $\int_0^1 x^2\,dx$

الحل

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{(1)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3} = \frac{1}{3}$$ ※

بعض خواص التكامل المحدود

1- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

2- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

3- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

4- إذا كانت الدالة $f(x)$ هي دالة زوجية فإن

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

5- إذا كانت $f(x)$ دالة فردية فإن

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

ملاحظة: جميع التكاملات التي ذُكرت سابقاً والخاصة بقواعد التكامل وخلافه عليه أن تُعطى في التكامل المحدود فبعد إجراء التكامل المعطى وليكن $\int_a^b f(x)\,dx$ نعوض في ناتج التكامل عن قيمة x بالقيمة العليا ثم نطرح منها قيمة x معوضاً عنها بالقيمة السفلى

أمثلة

مثال: أوجد $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}\,dx$

الحل

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}\,dx = \ln|e^x+2|\Big|_0^1 = \ln|e+2| - \ln|e^0+2|$$

$$= \ln\frac{|e+2|}{3}$$

مثال: أوجد

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

الحل

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{-1+1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

مثال : أوجد قيمة

$$\int_{x=\sqrt{3}}^{x=2} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx$$

الحل

نستخدم التكامل بالتعويض الذي ذكرناه سابقاً ولذلك

Put $x=\sqrt{3}\sec\theta \Rightarrow \sec\theta = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow dx = \sqrt{3}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

at $x=\sqrt{3} \Rightarrow \theta = 0$, at $x=2 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3}\tan^2\theta\, d\theta$$

$$= \sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sec^2\theta - 1)\, d\theta$$

$$= \sqrt{3}\left(\tan\theta - \theta\right)_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 1 - \sqrt{3}\,\frac{\pi}{6}$$

تمرينات : أوجد قيم التكاملات

1- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x\tan x}{\sqrt{2+\sec^2 x}}\,dx$

(إجعل البسط تفاضل ما بداخل الجذر الموجود في المقام وذلك بالضرب بسطاً ومقاماً في العدد 2 ثم أكمل ......)

* أوجد قيمة

$$2-\ I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}\, dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$$

إستخدم التكامل بالتعويض وعندئذ تتغير حدود التكامل كالآتي :

put $x = \frac{\pi}{2} - y \Longrightarrow dx = -dy$

at $x = 0 \Longrightarrow y = \frac{\pi}{2}$,

at $x = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow y = 0$

ثم عوض في التكامل تحصل على المطلوب

$$I = \frac{\pi}{4} \ \#$$

تطبيقات التكامل المحدود

يستخدم التكامل المحدود في العديد من التطبيقات والتي منها المساحات حيث علينا إيجاد المساحة بين منحنى دالة وأحد المحورين وكذلك إيجاد المساحة بين منحنيين وكذلك الحجوم الدورانية وأيضاً طول قوس من منحنى وغيرها.

نذكر الآن بعض قوانين هذه التطبيقات في صورة الأمثلة التالية:

المساحة A المحصورة بين منحنى الدالة $Y = f(x)$ ومحور X والمستقيمين $X = a$ ، $X = b$ تعطى من

$$A = \int_a^b Y\,dx$$

وأيضا المساحة A المحصورة بين منحنى الدالة $Y = f(x)$ ومحور Y والمستقيمين $Y = c$ ، $Y = d$ تعطى من

$$A = \int_c^d X\,dY$$

كما تعطى المساحة A بين المنحنيين اللذان تمثلهما الدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ حيث $f(x) \geq g(x)$ وكل منهما دالة في X من العلاقة

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx \quad , \quad x \in [a,b]$$

مثال: أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيات $X = 3 - 2Y^2$ ، $X = Y^2$

الحل

نوجد نقط التقاطع بين المنحنيين وذلك بحل المعادلتين معاً

$$\therefore 3 - 2Y^2 = Y^2 \Rightarrow 3 = 3Y^2 \Rightarrow Y = \pm 1 \Rightarrow X = 1, 1$$

وتكون نقط التقاطع هي $(1,-1)$ ، $(1,1)$

$$\therefore A = \int_{-1}^{1} \left((3 - 2Y^2) - Y^2\right) dY = \left(3Y - \frac{2Y^3}{3} - \frac{Y^3}{3}\right)_{-1}^{1}$$

$$\Rightarrow A = \left(3y - y^3\right)\Big|_{-1}^{1} = (3-1) - (-3+1) = 4$$

i.e., $A = 4$ ##

مثال: أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^3$ ، $y = x$

الحل

كما حدث في المثال السابق نوجد نقط التقاطع بين المنحنيين

i.e., $x = x^3 \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0$

$\Rightarrow x = 0, 1, -1 \Rightarrow y = 0, 1, -1$

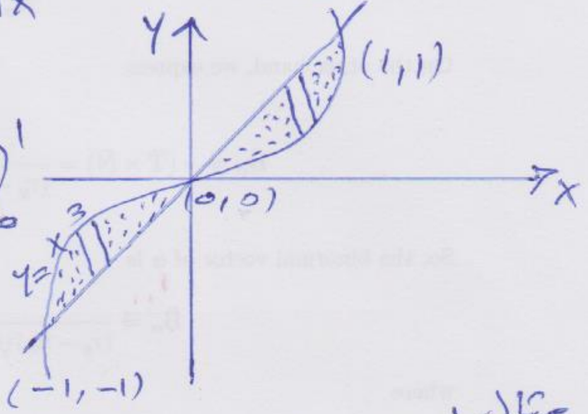
وتكون نقط التقاطع هي $(-1,-1), (0,0), (1,1)$

وتقطع المساحة من

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \; \#\#$$



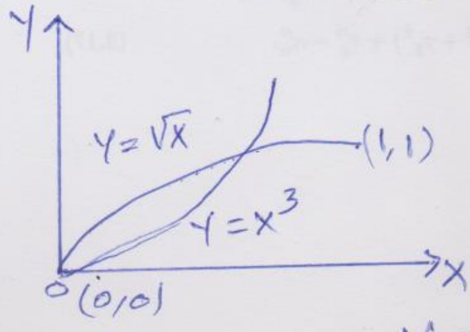
مثال: أوجد الحجم الدوراني الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحنيين $\underset{f(x)}{y = x^3}$ ، $\underset{g(x)}{y = \sqrt{x}}$ حول محور السينات

الحل

نحسب نقط التقاطع بين المنحنيين وذلك بحل معادلتيهما معاً

i.e., $x^3 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 1, 0$ ، $y = 1, 0$

أي أن نقط التقاطع هي $(1,1), (0,0)$



لاحظ أن الحجم الدوراني يعطى من العلاقة

$$V = \pi \int_a^b \left((f(x))^2 - (g(x))^2\right) dx$$

ويعطى الحجم المطلوب من

$$V = \pi \int_0^1 \left((\sqrt{x})^2 - (x^3)^2 \right) dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^6)\, dx = \pi \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{7} \right] = \frac{5\pi}{14} \#$$

مثال: أوجد طول القوس من المنحنى $f(x) = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$

بين $x=0 \,,\, x=1$

الحل

يعطى طول القوس من العلاقة

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

حيث $f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}(2x)$

$$= x(x^2+2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow L = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2(x^2+2)}\, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + x^4 + 2x^2}\, dx$$

$$\Rightarrow L = \int_0^1 (x^2+1)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right)_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

i.e., $L = \frac{4}{3}$