بسم الله الرحمن الرحيم

زوايا الإتجاه وجيوب التمام لمستقيم في الفراغ

من المعلوم أن الزاوية بين مستقيمين في الفراغ تقاس بالزاوية بين أى مستقيمين مرسومين من أى نقطة ويوازيان المستقيمان المعطيان في الفراغ.

ولإيجاد الزوايا التي يصنعها مستقيم M_1M_2 مع الإتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات OX, OY, OZ نرسم من نقطة M_1 المستقيمات M_1X', M_1Y', M_1Z' بحيث توازى المحاور الأصلية. عندئذ تكون الزوايا α, β, γ الموضحة بالرسم هي زوايا الإتجاه للمستقيم M_1M_2 وتسمى $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ جيوب تمام هذه الزوايا.

ومن هذا السياق تكون زوايا إتجاه المستقيم M_2M_1 هي $\pi-\alpha ; \pi-\beta ; \pi-\gamma$ والتي جيوب تمامها هي على الترتيب

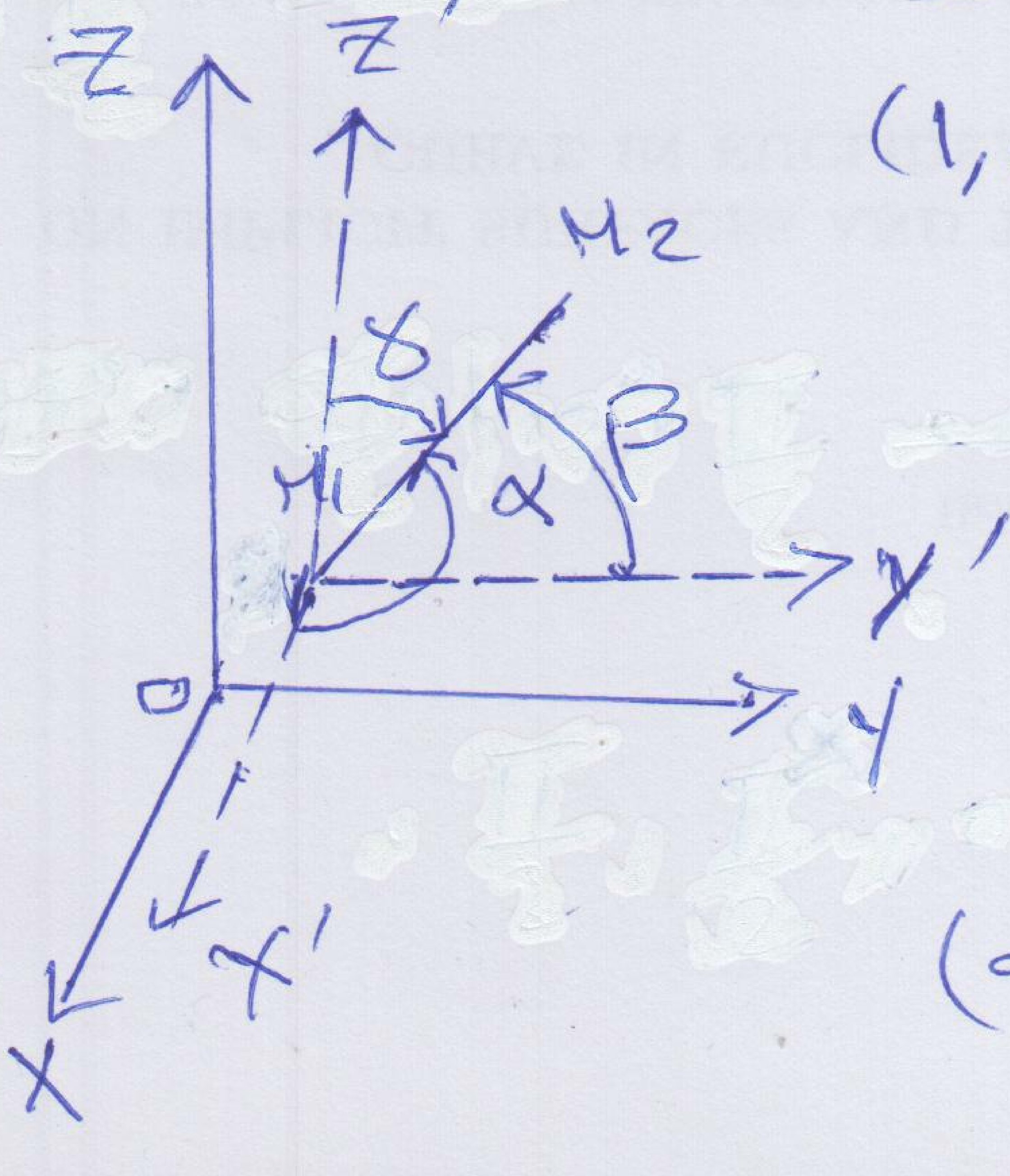
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha \; ; \; \cos(\pi-\beta) = -\cos\beta \; ;$$

$$\cos(\pi-\gamma) = -\cos\gamma .$$

وكحالة خاصة تكون زوايا إتجاه المحور OX هي $(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ وتكون جيوب تمامه هي $(1,0,0)$

بالمثل زوايا إتجاه المحور OY هي $(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2})$ وجيوب تمامه $(0,1,0)$

كذلك زوايا إتجاه المحور OZ هي $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0)$ وجيوب تمامه هي $(0,0,1)$



قاعدة : مجموع مربعات جيوب تمام إتجاه أي مستقيم في الفراغ يكون مساويا الواحد الصحيح.

ومن الملاحظات أن المستقيمات المتوازية تشترك في زوايا الإتجاه ومن ثم يكون لها نفس جيوب الإتجاه.

* لا يمكن أن تنعدم جميع جيوب تمام إتجاه مستقيم في آن واحد.

نسب إتجاه مستقيم: سوف نرمز إختصاراً لجيوب تمام إتجاه المستقيم بالرموز n, m, l أي أن

$$l = \cos\alpha \quad ، \quad m = \cos\beta \quad ، \quad n = \cos\gamma$$

نقول أن الثلاث أعداد a, b, c هي نسب إتجاه المستقيم الذي جيوب تمام إتجاهه l, m, n إذا وفقط إذا تحقق الشرط.

$$l : m : n = a : b : c$$

قاعدة: إذا كانت a, b, c هي نسب إتجاه المستقيم الذي جيوب تمام إتجاهه l, m, n فإن

$$l = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \; ; \quad m = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \; ; \quad n = \frac{\pm c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

وهذه العلاقات تعطي جيوب تمام إتجاه مستقيم بمعلومية نسب إتجاهه:

ملاحظة: إذا أعطي المستقيم بنقطتين هما $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ، $M_2(x_2, y_2, z_2)$ فإن نسب إتجاهه تعطى من

$$a = x_2 - x_1 \quad ، \quad b = y_2 - y_1 \quad ، \quad c = z_2 - z_1$$

المستوى

تعريف: هو سطح إذا أخذت عليه نقطتين M_1 , M_2 نقط المستقيم M_1M_2 تكون واقعة على هذا السطح.

نظرية: أي معادلة من الدرجة الأولى في x, y, z تدل على مستوى. وبالعكس معادلة أي مستوى تكون من الدرجة الأولى في x, y, z

صور مختلفة لمعادلات المستوى

- معادلة المستوى في الصورة العامة

يكتب المستوى في الصورة العامة $ax + by + cz + d = 0$

هذه المعادلة تحتوى على ثوابت عليه إختزال إلى 3 ثوابت فقط وهذا يعني أن المستوى في الفراغ يتحدد بثلاث شروط مستقلة.

عندما $d = 0$ فإن المستوى المار يمر بنقطة الأصل.

- معادلة المستوى المار بنقطة معلومة (x_1, y_1, z_1) ونسب اتجاه العمودى عليه a, b, c

تكتب هذه المعادلة على الصورة

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

- معادلة مستوى يمر بثلاث نقط معلومة $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ $M_3(x_3, y_3, z_3)$

تكتب هذه المعادلة في الشكل الآتي:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- معادلة مستوى يقطع أجزاء معلومة c_1, c_2, c_3 من محاور الاحداثيات

تكتب معادلة المستوى في الصورة

$$\frac{x}{c_1} + \frac{y}{c_2} + \frac{z}{c_3} = 1$$

نتناول الآن بعض الأمثلة لتوضيح ما سبق

مثال : أوجد جيوب تمام إتجاه المستقيم المار بالنقطتين $M_1(1,-2,3)$ ، $M_2(2,-3,5)$

الحل

نحسب نسب إتجاه M_1M_2 من

$a = 2-1 = 1$; $b = -3-(-2) = -1$; $c = 5-3 = 2$

وتكون عندئذ جيوب تمام الإتجاه لـ M_1M_2 هي

$$l = \frac{\pm 1}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(2)^2}} \; ; \; m = \frac{\pm(-1)}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(2)^2}} \; ; \; n = \frac{\pm 2}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(2)^2}}$$

مثال : أوجد معادلة المستوى الذي يمر بالنقطة $(1,-1,5)$ ويكون عمودياً على المستويين

$x+2y+z=0$; $2x-y+3z-1=0$

الحل

نسب اتجاهه a,b,c المستوى المطلوب يمر بالنقطة $(1,-1,5)$

$\therefore$ تكتب معادلته على الصورة

$$a(x-1)+b(y+1)+c(z-5)=0 \quad (*)$$

هذا المستوى عمودي على المستوى الأول

$\therefore a+2b+c=0$,

كذلك المستوى عمودي على المستوى الثاني

$2a-b+3c=0$

بحل المعادلات السابقة نحصل على

$$a = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \; ; \; b = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \; ;$$

$$c = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

بالتعويض بقيم a, b, c في المعادلة (*) نحصل على

$$7x - y - 5z + 17 = 0$$

مثال: إذا كان المستقيم المار بالنقطتين $(4, 10, 3)$ عمودي على مستوى يقابله في النقطة $(2, -3, 1)$ فأوجد معادلة المستوى.

الحل

المستوى المطلوب يمر بالنقطة $(2, -3, 1)$ واتجاهه a, b, c

∴ تكتب معادلته على الصورة

$$a(x-2) + b(y+3) + c(z-1) = 0 \quad (*)$$

ويمكن حساب a, b, c بمعلومية النقطتين كالآتي:

$$a = 4 - 2 = 2 \; ; \; b = 10 - (-3) = 13 \; ; \; c = 3 - 1 = 2$$

نعوض في (*) نحصل على المستوى المطلوب. $2x + 13y + 2z + 33 = 0$

مثال: أوجد معادلة المستوى العمودي على المستوى $2x - 5y + z - 3 = 0$ ويقطعه في المستقيم الذي يقع في المستوى xoz.

الحل

معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستوى $2x - 5y + z - 3 = 0$ والمستوى xoz هو

$$2x - 5y + z - 3 + \lambda y = 0 \quad (*)$$

هذا المستوى عمودي على المستوى $2x - 5y + z - 3 = 0$

i.e., $2(2) - 5(\lambda - 5) + 1(1) = 0$

$$\Rightarrow 4 - 5\lambda + 25 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 5\lambda = 30 \Rightarrow \boxed{\lambda = 6}$$

وبالتعويض عن قيمة λ في المعادلة $(*)$ نحصل على المستوى

$$2x + y + z - 3 = 0 \quad * \Leftarrow$$ المطلوب

الخط المستقيم في الفراغ

الصورة العامة لمعادلات الخط المستقيم

نفرض مستويين بالصورة

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \; ; \qquad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

حيث $a_1 : b_1 : c_1 \neq a_2 : b_2 : c_2$ يحدد هذان المستويان في الفراغ خطاً مستقيماً هو خط تقاطعهما. أي أن الخط المستقيم في الفراغ يمثل بمعادلتين من الدرجة الأولى في x, y, z.

معادلات الخط المستقيم بدلالة نسب اتجاهه ونقطة عليه

نفرض أن a, b, c هي نسب اتجاه مستقيم يمر بالنقطة (x_1, y_1, z_1) لإيجاد معادلات هذا الخط نفرض نقطة عامة $M(x, y, z)$ على المستقيم

$$\therefore x - x_1 : y - y_1 : z - z_1 = a : b : c$$

$$\Rightarrow x - x_1 = \lambda a \; ; \quad y - y_1 = \lambda b \; ; \quad z - z_1 = \lambda c$$

ومنها

$$x = x_1 + \lambda a \; ; \quad y = y_1 + \lambda b \; ; \quad z = z_1 + \lambda c \qquad (1)$$

تسمى المعادلات (1) بالمعادلات البارامترية للخط المستقيم

وإذا كانت $c \neq 0$ ، $b \neq 0$ ، $a \neq 0$ فإنه بحذف λ من (1)

نحصل على

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \qquad (2)$$

تسمى المعادلات (2) بالصورة القياسية لمعادلات الخط المستقيم

ملاحظة: علينا تحويل الصورة القياسية (2) إلى الصورة العامة:

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} , \quad \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \qquad (3)$$

معادلات الخط المستقيم المار بنقطتين معلومتين

نفرض أن المستقيم يمر بالنقطتين $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ، $M_2(x_2, y_2, z_2)$

فإذا كانت a, b, c هي نسب إتجاه هذا المستقيم فإن:

$$x_2 - x_1 : y_2 - y_1 : z_2 - z_1 = a : b : c$$

وبذلك تكون الصورة القياسية لمعادلات الخط المستقيم $M_1 M_2$

هي:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (4)$$

تقاطع مستقيمين

نفرض مستقيمين

في الصورة القياسية

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1} ,$$

$$\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$$

إذا تقاطع المستقيمان فإنهما يقعان في مستوى واحد معادلته

تقع في الصورة

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

ونفص شرط تقاطع المستقيمين من

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

وقد حصلنا على المعادلات (1) ، (2) كالآتي :

المستوى المطلوب يمر بالنقطة (x_1, y_1, z_1) ولذلك فإن معادلته

$$a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0 \qquad (3)$$

المعادلة (3) تمر بالنقطة (x_2, y_2, z_2) لذلك يمكن كتابة

$$a(x_2-x_1) + b(y_2-y_1) + c(z_2-z_1) = 0 \qquad (4)$$

ومن شرط تعامد المستوى (3) مع المستقيمين المعطيين

يمكن كتابة المعادلتين

$$a a_1 + b b_1 + c c_1 = 0 , \qquad (5)$$

$$a a_2 + b b_2 + c c_2 = 0 \qquad (6)$$

وبحذف a, b, c من المعادلات (4) ، (5) ، (6)

نحصل على شرط التقاطع (2)

وبحذف a, b, c من المعادلات (3) ، (5) ، (6)

نحصل على معادلة المستوى (1) .

بسم الله الرحمن الرحيم

بعد أن قمنا بدراسة الخط المستقيم في الفراغ وعرفنا صوره المختلفة ومنها الصورة العامة للخط المستقيم ومعادلة مستقيم بدلالة نقطة عليه ولنسب إتجاهه ومعادلات مستقيم بدلالة نقطتين عليه، هذا بالاضافة إلى دراسة تقاطع مستقيمين وشرط التقاطع ومعادلة المستوى الواقع فيه المستقيمان المتقاطعان. والآن نحاول دراسة ماذا لو كان المستقيمان غير متقاطعان

المستقيمان المتخالفان

إذا لم يقع المستقيمان في الفراغ في مستوى واحد فإنهما يسميان بالمستقيمان المتخالفين وعندئذ سيكون لهما عمود مشترك واحد وهو عمودي على كل من المستقيمين وطوله يسمى أقصر بعد بين المستقيمين.

معادلة أقصر بعد بين مستقيمين متخالفين

لإيجاد هذه المعادلة نفرض المستقيمان هما

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1} \quad , \quad \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$$

عندئذ فإن المعادلة المطلوبة تعطى بمعادلتي المستويين

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \end{vmatrix}=0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix}=0$$

وهي معادلات P_1P_2

ويلاحظ في معادلة المستقيمين السابقين احتواء كل محدد على الثوابت a, b, c والتي يجب معرفة كيفية حسابها.

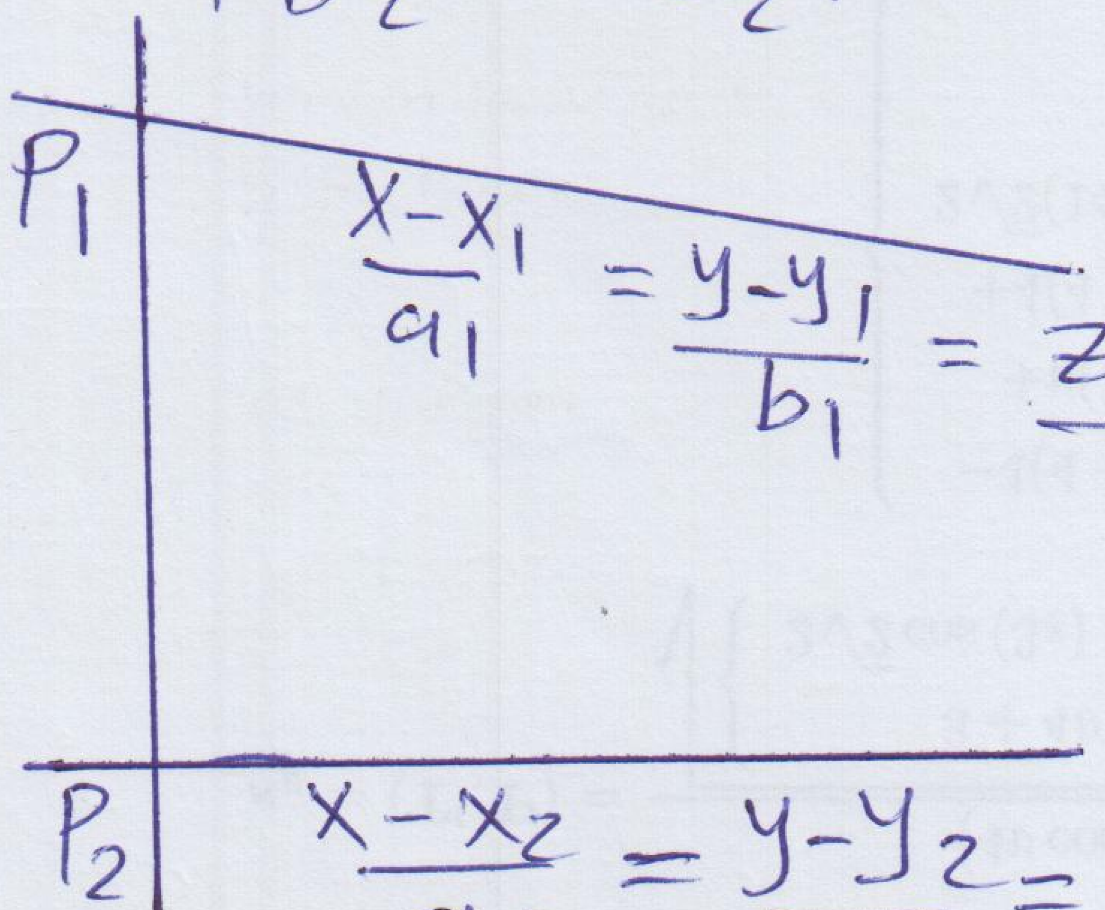
تحسب الثوابت a, b, c من خلال معادلتي التعامد بين كل مستقيم والعمود المشترك كالآتي:

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0$$

$$aa_2 + bb_2 + cc_2 = 0$$

ومنها نستطيع a, b, c التي عرفناها سابقاً

$$a = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} , \quad b = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} , \quad c = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$



يلاحظ في الرسم (x_1, y_1, z_1) نقطة على المستقيم الأول الذي له اتجاه a_1, b_1, c_1

وهكذا المستقيم الثاني (x_2, y_2, z_2) نقطة عليه وله اتجاه a_2, b_2, c_2

طول أقصر بعد بين المستقيمين المتخالفين

إذا فرضنا المستقيمين بنفس الصورة السابقة فإن معادلة أقصر بعد بينهما تحصل من العلاقة

$$\rho = \frac{1}{\beta} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} ; \quad \beta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

حيث a, b, c نسب اتجاه P_1P_2 وتحسب بالطريقة التي سبق التنويه عنها.

والآن نسوق بعض الأمثلة للتوضيح

مثال أثبت أن المستقيمين

$$\frac{X-1}{2}=\frac{Y-2}{-3}=\frac{Z-1}{-1} \quad ; \quad \frac{X-4}{-3}=\frac{Y-3}{-1}=\frac{Z+2}{3}$$

يقعان في مستوى واحد ثم أوجد هذا المستوى.

الحل

نعلم أنه يقع المستقيمان في مستوى واحد إذا كانا متقاطعان ولذلك نبحث شروط التقاطع الذي تم الحديث عنه في محاضرة سابقة وهو

$$\begin{vmatrix} X_2-X_1 & Y_2-Y_1 & Z_2-Z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} 4-1 & 3-2 & -2-1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0$$

وبذلك يكون المستقيمان متقاطعان.

نوجد معادلة المستوى الواقع فيه المستقيمان المتقاطعان من

$$\begin{vmatrix} X-X_1 & Y-Y_1 & Z-Z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow \begin{vmatrix} X-1 & Y-2 & Z-1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0$$

وبفك المحدد نحصل على معادلة المستوى المطلوب

$$10X+3Y+11Z-27=0$$

مثال أثبت أن المستقيمين

$$\frac{X+3}{-1}=\frac{Y+1}{2}=\frac{Z-2}{1} \quad ; \quad \frac{X-2}{3}=\frac{Y-4}{1}=\frac{Z+1}{1}$$

غير متقاطعين ثم أوجد معادلة العمود المشترك بينهما واحسب طول العمود.

الحل

يعطى شرط عدم التقاطع من

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2-(-3) & 4-(-1) & -1-2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5(2-1)-5(-1-3)-3(-1-6)=46\neq 0$$

وإذا كان العمود المشترك بين المستقيمين هو P_1P_2 فإن معادلاته تعطى بمعادلات المستويين الآتيين:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y+1 & z-2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 0 \;؛\; \begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

حيث $1, 4, -7$ تم ايجادهم من تعامد المستقيمين

والعمود المشترك الذى نسب اتجاهه a, b, c

$$-a+2b+c=0$$

$$3a+b+c=0 \Rightarrow a=1 \;؛\; b=4 \;؛\; c=-7$$

وبفك المحددات السابقة نحصل على معادلتى المستويين اللذان يحددان معادلة العمود المشترك

$$3x+y+z+8=0 \quad \text{و} \quad x-2y-z+5=0$$

والآن يعطى طول العمود (أقصر بعد بين المستقيمين) من العلاقة

$$\rho = \frac{1}{\beta}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

حيث

$$\beta = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{(1)^2+(4)^2+(-7)^2} = \sqrt{66}$$

وعندئذ يُعطى طول العمود من

$$\rho = \frac{46}{\sqrt{66}} .$$

مثال أوجد قيمة الثابت C التي تجعل المستقيم $3x - y + 2z - 6 = 0$; $x + 4y - z + c = 0$ يقطع محور السينات.

الحل

معادلة محور السينات في الفراغ الثلاثي البعد هي $y = 0 ; z = 0$

وبالتعويض في المستقيم المعطى نجد أن

$$3x = 6 \implies x = 2$$

والآن بالتعويض بـx في معادلة المستقيم الأخرى نحصل على

$$2 + c = 0 \implies \boxed{c = -2}$$