بسم الله الرحمن الرحيم

## جزء التكامل غير المحدد

لتكن لدينا الدالة $f(x)$ المعرفة على الفترة المفتوحة $(a,b)$ من خط الأعداد $\mathbb{R}$. نهدف الآن للبحث عن دالة أخرى $\phi(x)$ بحيث تحقق

$$\frac{d}{dx}\phi(x) = \phi'(x) = f(x)$$

تسمى الدالة $\phi(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$.

**تعريف**: يعرف التكامل غير المحدد للدالة $f(x)$ بأنه الصورة العامة لأي دالة مقابلة للدالة $f(x)$ ويرمز له بالرمز $\int f(x)\,dx$ وعندئذ نكتب

$$\int f(x)\,dx = \phi(x) + c$$

والآن نقدم بعض التكاملات للدوال الأساسية

1- $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , \quad n \neq -1$

2- $\int a\,dx = ax + c$ , where $\int 0\,dx = c$

3- $\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$

4- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

5- $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

6- $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

7- $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

8- $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$

9- $\int \sec x \, dx = \mathrm{lin}|\sec x + \tan x| + c$

10- $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \mathrm{lin}|\operatorname{cosec} x - \cot x| + c$

11 - $\int \tan x \, dx = \mathrm{Lin}|\sec x| + c$

12 - $\int \cot x \, dx = \mathrm{Lin}|\sin x| + c$

13 - $\int e^{x} \, dx = e^{x} + c$

14 - $\int a^{x} \, dx = \frac{a^{x}}{\mathrm{Lin}\, a} + c$

وعليه نصحح بعض القوانين السابقة كالآتي:

15- $\int (f(x))^{n} f'(x) \, dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + c$

16- $\int e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$

17 - $\int e^{f(x)} f'(x) \, dx = e^{f(x)} + c$

18 - $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \mathrm{lin}|f(x)| + c$

والآن نستعرض بعض الأمثلة لفهم القواعد السابقة.

* مثال: أوجد $\int \frac{\mathrm{Lin}\, x}{x} \, dx$

الحل

$\int \frac{\mathrm{Lin}\, x}{x} \, dx = \int \mathrm{Lin}\, x \left(\frac{1}{x}\right) dx$ نكتب التكامل كالآتي

داخل التكامل دالة $\mathrm{Lin}\, x$ مضروبة في تفاضلها وهو $\frac{1}{x}$

$\therefore$ ناتج التكامل $= \frac{(\text{الدالة})^{n+1}}{n+1} + \text{ثابت} = \frac{(\mathrm{Lin}\, x)^2}{2} + c$

مثال: أوجد

$$* \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$$

الحل

بالنظر إلى التكامل نجد أن البسط $e^x$ هو تفاضل المقدار الموجود تحت الجذر التربيعي الموجود بالمقام وعندئذ يكون الناتج = ضعف (المقام) + ثابت

i.e., $$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx = 2\sqrt{e^x+1} + c$$

وهذا المثال يتفق مع القاعدة الآتية:

$$* \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)} + c$$

مثال: أوجد

$$* \int \frac{1}{x(\operatorname{Lin} x)^3}\,dx$$

الحل

علينا كتابة التكامل بالصورة
$$\int \frac{1}{x(\operatorname{lin} x)^3}\,dx = \int (\operatorname{Lin} x)^{-3}\,\frac{1}{x}\,dx$$

وهذا التكامل على صورة $(\text{دالة})^n$ مضروبة في تفاضلها

ويكون ناتج التكامل $\frac{(\text{الدالة})^{n+1}}{n+1}$ + ثابت

i.e., $$\int (\operatorname{Lin} x)^{-3}\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{(\operatorname{Lin} x)^{-3+1}}{-3+1} + c$$

$$= \frac{1}{-2(\operatorname{Lin} x)^2} + c$$

مثال: أوجد

$$* \int \tan^3 x \sec x\,dx$$

الحل

$$\int \tan^3 x \sec x \, dx = \int (\tan^2 x) \sec x \tan x \, dx$$

ومن حساب المثلثات نعلم أن $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

نعوض عن ذلك في علاقة التكامل

$$\Longrightarrow \int (\sec^2 x - 1) \sec x \tan x \, dx$$

$$\Longrightarrow \int \underbrace{(\sec x)^2}_{\text{دالة}} \underbrace{(\sec x \tan x)}_{\text{تفاضلها}} dx - \int \sec x \tan x \, dx$$

$$= \frac{(\sec x)^3}{3} - \sec x + C$$

مثال: أوجد

$$* \int \cos^2 x \, dx$$

الحل

ومن حساب المثلثات نعوض عن $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$$\therefore \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{\sin 2x}{2(2)} + C$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

مثال: أوجد قيمة التكامل

$$* \int \frac{dx}{1 + \sin x}$$

الحل

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} = \int \frac{1}{1 + \sin x} \cdot \frac{(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)} \, dx$$

$$= \int \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} \, dx = \int \frac{(1 - \sin x)}{\cos^2 x} \, dx$$

وبتجزئ البسط على المقام عليه كتابة

$$\int \frac{(1-\sin x)}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \sec^2 x\,dx - \int \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}\,dx$$

$$= \int \sec^2 x\,dx - \int \sec x \tan x\,dx$$

$$= \tan x - \sec x + c$$

$*\ \int \frac{1}{1+e^x}\,dx$ **مثال** أوجد قيمة التكامل

الحل

$$\int \frac{1}{(1+e^x)}\,dx = \int \frac{(1+e^x)-e^x}{(1+e^x)}\,dx$$

$$= \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$$

$$= \int dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

$= x - \int$ البسط تفاضل المقام

$$= x - \ln(1+e^x) + c$$

**تكاملات تعطي دوال مثلثية عكسية**

$$1-\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$2-\ \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

مثال: أوجد قيمة $* \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

الحل

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(2)^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{2} + c \text{ , where } a=2$$

مثال: أوجد قيمة $* \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$

الحل

$$\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{9}-x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{2}{3})^2-x^2}} = \frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{x}{(2/3)} + c$$

$$= \frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right) + c$$

مثال: أوجد قيمة $* \int \frac{e^{x}\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

الحل

$$\int \frac{e^{x}\,dx}{\sqrt{1-(e^{x})^2}}$$

وهنا لابد أن يكون تفاضل الدالة تحت الجذر التربيعي وتحديداً بعد إشارة السالب موجود في البسط وبالفعل سنجد تفاضل الدالة $e^{x}$ تحت الجذر تفاضلها $e^{x}$ الموجود في البسط

ومن ثم

$$\int \frac{e^{x}\,dx}{\sqrt{1-(e^{x})^2}} = \sin^{-1}(e^{x}) + c$$

مثال: أوجد

$$* \int \frac{dx}{x^2-4x+8}$$

الحل

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+8} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+4} = \int \frac{dx}{(2)^2+(x-2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)+c$$

مثال: أوجد قيمة

$$* \int e^{\cos 2x} \sin 2x \, dx$$

الحل

لحل هذا التكامل لابد أن يكون تفاضل القوة (الأس) المرفوعة إليها الدالة $e$ موجود داخل التكامل وبالنظر إلى القوة (الأس) نجد أنه

$$(\cos 2x)' = -2\sin 2x$$

لذلك الأمر يستوجب ضبط التكامل على الصورة

$$\int e^{\cos 2x} \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2}\int e^{\cos 2x}(-2\sin 2x)\, dx$$

حيث ضربنا في $-2$ وقسمنا على $-2$ لتهيئة التكامل

$$\therefore \int e^{\cos 2x} \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} e^{\cos 2x} + c$$

مثال: أوجد قيمة

$$* \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$$

الحل

هذا التكامل يشبه تماما التكامل في المثال السابق ولذلك نحاول جعل تفاضل الأس وهو $\sqrt{x}$ موجود داخل التكامل

وحيث أن $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ لذلك نكتب التكامل كالآتي

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

لاحظ أننا ضربنا في العدد ٢ وقسمنا عليه أيضاً.

طرق التكامل

هناك بعض التكاملات التي يصعب حلها باستخدام القواعد السابقة التي دوناها، الأمر الذي يتطلب وجود مخرج لحساب هذه التكاملات، وهنا نستخدم الطريقة المناسبة للتغلب على التكامل وإيجاد قيمته.

ومن هذه الطرق ما يلي :

١- التكامل بالتجزئ ٢- التكامل بالإختزال

٣- التكامل باستخدام الكسور الجزئية

٤- التكامل بالتعويض

أولاً : التكامل بالتجزئ

هذه الطريقة تستخدم لإيجاد حاصل ضرب دالتين $u, v$ مثلاً حيث نضع التكامل على الصورة $\int u\,dv$ وعند ذلك يكون

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

ودائماً نختار الدالة $u$ بالدالة التي ينتهي تفاضلها.

مثال : أوجد

$$* \int x e^{x}\,dx$$

## الحل

لكي نستخدم التكامل بالتجزئ لابد أن نضع التكامل المعطى في الصيغة $\int u\,dv$ ولذلك كما ذكرنا نضع

$$u = x \quad ; \quad dv = e^{x}\,dx$$

$$\Downarrow\ du = dx \quad ; \quad \Downarrow\ v = \int e^{x}\,dx = e^{x}$$

$$\therefore \int x e^{x}\,dx = x e^{x} - \int e^{x}\,dx = x e^{x} - e^{x} + c$$

**مثال:** أوجد $\int x^{2} e^{x}\,dx$

## الحل

هذا التكامل يشبه التكامل السابق ولكن سوف تتم عملية التكامل على مرحلتين حيث الدالة الموجودة داخل التكامل $x$ مرفوعة للقوة 2 (الأس 2) وهكذا حسب القوة (الأس) المرفوعة لها الدالة $x$ تتم عمليات التكامل المتتالية.

لذلك نختار

$$u = x^{2} \quad ; \quad dv = e^{x}\,dx$$

$$\Downarrow\ du = 2x\,dx \quad ; \quad \Downarrow\ v = \int e^{x}\,dx = e^{x}$$

$$\therefore \int x^{2} e^{x}\,dx = x^{2} e^{x} - 2\underbrace{\int x e^{x}\,dx}$$

التكامل الأخير هو المثال السابق الذي أوجدنا قيمته

$$\therefore \int x^{2} e^{x}\,dx = x^{2} e^{x} - 2\underbrace{\left[x e^{x} - e^{x}\right]}$$

$$\Rightarrow \int x^{2} e^{x}\,dx = x^{2} e^{x} - 2x e^{x} + 2e^{x} + c$$

أمثلة: أوجد قيم التكاملات الآتية:

1- $\int \ln x \, dx$  2- $\int x \ln x \, dx$  3- $\int x^3 \ln x \, dx$

الحل

بالنسبة للتكامل الأول نضع $u = \ln x$ ; $dv = dx$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$du = \frac{1}{x} dx$ ; $v = \int dx = x$

ثم نقوم بتطبيق قاعدة التكامل $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

التكامل الثاني نضع $u = \ln x$ ; $dv = x \, dx$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$du = \frac{1}{x} dx$ ; $v = \int x \, dx = \frac{x^2}{2}$

ثم نطبق قاعدة التكامل بالتجزئ نحصل على التكامل مباشرة

بالنسبة للتكامل الثالث نضع $u = \ln x$ ; $dv = x^3 \, dx$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$du = \frac{1}{x} dx$ ; $v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$

وبعد التطبيق المباشر لقاعدة التكامل بالتجزئ نحصل على المطلوب.

وهنا نلاحظ أننا استخدمنا التعويض $u = \ln x$ على الرغم من أنه تفاضل غير صعب وذلك لأن الاختيار الآخر صعب حيث يصعب تكامل هذه الدالة أي أنه لو فرضنا أن

$dv = \ln x \, dx \Rightarrow v = \int \ln x \, dx$

يصعب تكاملها

عندئذ يتعذر تحديد الدالة $v$.