مثال: أوجد قيم التكاملات

1- $\int \tan^{-1}x\,dx$ 2- $\int e^{x}\sin x\,dx$

الحل

في التكامل الأول نضع

$u = \tan^{-1}x$; $dv = dx$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$du = \frac{dx}{1+x^2}$ $v = \int dx = x$

$$\therefore \int \tan^{-1}x\,dx = x\tan^{-1}x - \int x \cdot \frac{dx}{1+x^2}$$

والتكامل الأخير ↑ علينا جعل البسط فيه هو تفاضل المقام وذلك بالضرب في الرقم 2 والقسمة عليه كالآتي

$$\int x \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

عندئذ يكون التكامل الأصلي هكذا

$$\int \tan^{-1}x\,dx = x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

بالنسبة للتكامل الثاني

نضع

$u = e^{x}$; $dv = \sin x\,dx$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$du = e^{x}dx$ $v = \int \sin x\,dx = -\cos x$

وبالتعويض في التكامل بالتجزئ للتكامل المعطى نحصل على

$$\int e^{x}\sin x\,dx = -e^{x}\cos x + \int \cos x\, e^{x}\,dx \quad (1)$$

والتكامل الأخير يتطلب منا معاملته بنفس الطريقة التى إتبعناها للتكامل الأصلى وذلك من حيثيا العروض.

التى إفترضناها للدوال u , v كالآتى

نضع

$$u = e^{x} \quad ; \quad dv = \cos x \, dx$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$du = e^{x} dx \qquad v = \int \cos x \, dx = \sin x$$

$\therefore$ التكامل الذى نريد حسابه الآن وهو جزء من التكامل الأصلى

هو

$$\int e^{x} \cos x \, dx = e^{x} \sin x - \int \sin x \, e^{x} \, dx \quad (2)$$

والتكامل الأخير $\uparrow$ هو نفس التكامل الأصلى المطلوب

ولذلك بتسمية التكامل الأصلى I فإنه من (2) فى (1)

$$I = \int e^{x} \sin x \, dx = -e^{x} \cos x + e^{x} \sin x - I$$

$$\therefore 2I = e^{x} (\sin x - \cos x)$$

$$\Rightarrow I = \tfrac{1}{2} (\sin x - \cos x) e^{x} + c .$$

ملاحظة فى هذا المثال أن كلا من الدوال $\sin x \, ; \, e^{x}$ غير منتهية التفاضل ولذلك علينا إختيار $u = e^{x}$ or $\sin x$.

تمرين

أوجد قيم التكاملات

$$1- \int \sin^{-1} x \, dx \qquad 2- \int x^{2} \sin x \, dx$$

التكامل بالإختزال

هناك بعض التكاملات التى عند حسابها تنتج تكاملات لها علاقة بها فمثلاً إذا كان التكامل الأصلى هو I_n فإننا نحصل على

على تكاملات I_{n-1} أو I_{n-2} و I_{n-3} وهكذا
وللتعامل مع هذه التكاملات فعتبر الآتى حيثا نستعرض بعض الصور
القياسية للإختزال

مثال: أوجد قيمة $I_n = \int x^n e^{ax} dx$

الحل

نستخدم التكامل بالتجزئ ونضع

$u = x^n$ ، $dv = e^{ax} dx$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$du = n x^{n-1} dx$ $\qquad$ $v = \int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$.

وبالتعويض فى التكامل الأصلى نحصل على

$$I_n = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int e^{ax} x^{n-1} dx$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} I_{n-1} \quad \boxed{1}$$

مثال: أوجد صيغة إختزال التكامل $\int x^3 e^{2x} dx$

الحل

نرمز لهذا التكامل بالرمز I_3 فيكون

$$I_3 = \int x^3 e^{2x} dx \quad , \text{where } n = 3 \ , \ a = 2$$

وبالتعويض فى صيغة الإختزال $\boxed{1}$ للمثال السابق يكون

$$I_3 = \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{2} I_2 , \quad \boxed{2}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - I_1 ,$$

$$I_1 = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} I_0 ,$$

$$I_0 = \int x^0 e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + c$$

وبالتعويض عدد ما سبعد في العلاقة $\boxed{2}$

$$\therefore I_3 = \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{4} x^2 e^{2x} + \frac{3}{4} x e^{2x} - \frac{3}{8} e^{2x}$$

i.e.,
$$I_3 = \frac{1}{8} e^{2x}(4x^3 - 6x^2 + 6x - 3) \ //$$

مثال : لنعتبر الآن التكاملين التاليين

1- : $I_n = \int x^n \cos ax \, dx$ 2- $I_n = \int x^n \sin ax \, dx$

نستطيع باستنتاج صيغ الإختزال لهذه التكاملات

$$I_n = \frac{1}{a} x^n \sin ax - \frac{n}{a} J_{n-1} ,$$

$$J_n = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a} I_{n-1}$$

مع الأخذ في الإعتبار أن

$$I_0 = \int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax + C ,$$

$$J_0 = \int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$$

لكي نوجد التكامل I_n عوضنا عن

$u = x^n$; $dv = \cos ax \, dx$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$du = n x^{n-1} dx$ $v = \int \cos ax \, dX = \frac{1}{a} \sin ax$

وفي التكامل J_n إستخدمنا التعويض

$$u = x^n \quad ; \quad dv = \sin ax\, dx$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$du = n x^{n-1} dx \qquad v = \int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a} \cos ax \;.$$

مثال: أوجد صيغة إختزال لكل من

$$1-\quad I_n = \int \cos^n x\, dx \qquad\qquad 2-\quad I_n = \int \sin^n x\, dx$$

الحل

نستخدم التكامل بالتجزئ لكل من التكاملين

ففي التكامل الأول يكتب هكذا

$$I_n = \int \cos^{n-1} x \,.\, \cos x\, dx$$

$$I_n = \int \underbrace{\cos^{n-1} x}_{u}\, \underbrace{d}_{d}\underbrace{(\sin x)}_{v} = \int u\, dv = uv - \int v\, du$$

ونحصل في النهاية على

$$I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{(n+1)}{n} I_{n-2} \quad \#$$

بالمثل للتكامل الثاني

$$I_n = \int \sin^n x\, dx$$

$$= \int \sin^{n-1} x \sin x\, dx = \int \underbrace{\sin^{n-1} x}_{u}\, \underbrace{d}_{d}\underbrace{(-\cos x)}_{v}$$

وبتطبيق قانون التكامل بالتجزئ نحصل على الصيغ التكرارية

$$I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{(n-1)}{n} I_{n-2} \quad \#$$

أثناء تطبيق قانون التكامل بالتجزئ سوف نستخدم القانون المشهور في حساب المثلثات وهو $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

وقد استخدمناه مره في التكامل الأصل السابق $\int \cos^n x\,dx$

ومره أخرى في التكامل الثاني $\int \sin^n x\,dx$

حيث عوضنا عن المقدار $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ للتكامل الأول

وعوضنا عن المقدار $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ للتكامل الثاني

* علي التكامل مع التكاملات $I_n = \int \cos^5 x\,dx$ ؛ $I_n = \int \sin^4 x\,dx$

وذلك بالتعويض في الصيغ التكرارية السابقة لكل تكامل

حيث في التكامل الأول $n = 5$ وفي التكامل الثاني $n = 4$

التكامل بالتعويض

بعض التكاملات قد يحتاج لتعويض مناسب لإيجاد قيمته وهذه التعويضات قد تكون تعويضات جبرية عند ظهور $\sqrt{\ }$ في مسائل التكامل وقد تكون تعويضات مثلثية كما سنرى من خلال الأمثلة التالية :

مثال : أوجد $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$ (تعويضات جبرية)

الحل

نضع المقدار الموجود تحت الجذر التربيعي = كمية مربعة

i.e., Let $x+1 = u^2 \Rightarrow x = u^2 - 1$

$\Downarrow \; dx = 2u\,du$

وبالتعويض في علامة التكامل نحصل على

$$\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}} = \int \frac{2u\,du}{(u^2+1)u} = 2\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= 2\tan^{-1} u + c$$

$$= 2\tan^{-1}\sqrt{x+1} + c$$

مثال: أوجد $\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}\,dx$ (التعويضات جبرية)

الحل

نضع
$x = u^2$
$dx = 2u\,du$

وبالتعويض في علامة التكامل نحصل على

$$\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}\,dx = \int \frac{(u+2)\,2u\,du}{(u-1)}$$

$$= 2\int \frac{(u^2+2u)}{(u-1)}\,du$$

نقوم بعمل قسمة مطولة للبسط على المقام وعندئذ يكون

$$\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}\,dx = 2\int \left((u+3) + \frac{3}{u-1}\right)du$$

$$= 2\int (u+3)\,du + 6\int \frac{du}{u-1}$$

$$= 2\left(\frac{u^2}{2} + 3u\right) + 6\ln|u-1| + c$$

$$\therefore \int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}\,dx = x + 6\sqrt{x} + 6\ln|\sqrt{x}-1| + c$$

تمرين

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-4}}$$

* إستخدم التعويض المناسب لإيجاد قيمة التكامل

إستخدم التعويض $x^2-4=u^2$ (التعويضات جبرية)

والتعويضات المثلثية هي عادة ما تستخدم في الحالات الثلاثة الآتية:

$$\sqrt{a^2-x^2} \qquad \sqrt{a^2+x^2} \qquad \sqrt{x^2-a^2}$$

وللتخلص من الجذور نستخدم التعويضات المناسبة

ففي حالة إحتواء التكامل على $\sqrt{a^2-x^2}$ نستخدم التعويض

$$x = a\sin\theta \Rightarrow dx = a\cos\theta\,d\theta$$

وفي حالة إحتواء التكامل على $\sqrt{a^2+x^2}$ نستخدم التعويض

$$x = a\tan\theta \Rightarrow dx = a\sec^2\theta\,d\theta$$

وفي حالة إحتواء التكامل على $\sqrt{x^2-a^2}$ نستخدم التعويض

$$x = a\sec\theta \Rightarrow dx = a\sec\theta\tan\theta$$

وأيضاً نستخدم القوانين التالية البسيطة

$$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta \;؛\; \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 \;،\; \sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$$

مثال: أوجد $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx$

الحل

$x = a\sin\theta \Rightarrow dx = a\cos\theta\, d\theta$ نستخدم التعويض

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}\, dx = \int \frac{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}}{a^2\sin^2\theta}\, a\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}}{a^2\sin^2\theta}\, a\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{\cancel{a}\cos\theta \cdot \cancel{a}\cos\theta\, d\theta}{\cancel{a^2}\sin^2\theta} = \int \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int \cot^2\theta\, d\theta = \int (\operatorname{cosec}^2\theta - 1)\, d\theta$$

$$= \int \operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta - \int d\theta$$

$$= -\cot\theta - \theta + C$$

$$= -\cot\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad \#$$

مثال: أوجد $\int \sqrt{x^2+4}\; x^3\, dx$

الحل

$x = 2\tan\theta \Rightarrow dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$ نضع

$$\therefore \int \sqrt{4\tan^2\theta + 4}\; (8\tan^3\theta)(2\sec^2\theta)\, d\theta$$

$$\Rightarrow 32 \int \sec^2\theta\, (\tan^3\theta) \sec\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow 32 \int \sec^3\theta \tan^3\theta\, d\theta = 32 \int \sec^2\theta \tan^2\theta (\sec\theta \tan\theta)\, d\theta$$

$$= 32\int \sec^2\theta\,(\sec^2\theta - 1)(\sec\theta\tan\theta)\,d\theta$$

$$= 32\int \sec^4\theta\,(\sec\theta\tan\theta)\,d\theta - \int \sec^2\theta\,(\sec\theta\tan\theta)\,d\theta$$

$$32\left(\frac{\sec^5\theta}{5} - \frac{\sec^3\theta}{3}\right) + c$$

$$= \frac{32}{5}\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^5 - \frac{32}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^3 + c \quad \#$$

تمارين

أوجد قيم التكاملات الآتية :

$\int (x-1)\sqrt{x+2}\,dx$ — تعويض جبري

$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ — تعويض مثلثي

$\int \frac{e^x}{\sqrt{9-e^{2x}}}\,dx$ — تعويض مثلثي

$\int \frac{x+3}{x+1}\,dx$ — قواعد التكامل

$\int \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$ — قواعد التكامل

$\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\,dx$ — قواعد التكامل

$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$ — قواعد التكامل