الكرة

هى السطح الذى ترسمه نقطة تتحرك فى الفراغ بحيث تظل دائما على بعد ثابت من نقطة ثابتة فى الفراغ. تسمى النقطة الثابتة مركز الكرة ويسمى البعد الثابت نصف قطر الكرة.

وإذا كان مركز الكرة M هو النقطة (α, β, γ) وأن نصف قطر الكرة هو r. فإذا كانت $P(x, y, z)$ أى نقطة على سطح الكرة فإن

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2 \qquad (1)$$

المعادلة (1) هى معادلة الكرة وهى معادلة من الدرجة الثانية فى x, y, z وتحقق الشروط

١- معامل x^2 = معامل y^2 = معامل z^2 لا يساوى صفر

٢- معامل xy = معامل yz = معامل zx = صفر

وبصفة عامة أى معادلة من الدرجة الثانية فى x, y, z على الصورة

$$x^2+y^2+z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0 \qquad (2)$$

تمثل كرة لأنها تكتب على الصورة

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 + (z+c)^2 = a^2+b^2+c^2-d$$

وهذه تمثل معادلة كرة مركزها $(-a, -b, -c)$ ونصف قطرها

$$r = \sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$$

ملاحظات:

١- المعادلة (2) تشتمل على أربعة ثوابت ولذلك تحتاج الكرة أربعة شروط لتحديدها.

٢- تكون الكرة حقيقية أو تخيلية على حسب كون

أو $a^2+b^2+c^2 > d$ ، $a^2+b^2+c^2 < d$ على الترتيب.

تكون الكرة نقطة عندما $a^2+b^2+c^2 = 0$

٣- إذا كان مركز الكرة هو نقطة الأصل $(0,0,0)$ فإن معادلتها تأخذ الصورة $x^2+y^2+z^2 = r^2$

<u>مثال</u>: أوجد مركز ونصف قطر الكرة

$$4x^2+4y^2+4z^2-8x-16y+8z+15=0$$

<u>الحل</u>

قبل أن نبدأ الحل لابد أن نجعل معامل x^2 ، y^2 ، z^2 يساوي الواحد لذلك نقسم المعادلة كلها على 4 نحصل على

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z+\frac{15}{4}=0$$

عندئذ مركز الكرة هو $M(1,2,-1)$

نصف قطر الكرة $r=\sqrt{(1)^2+(2)^2+(-1)^2-\frac{15}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

<u>العمودي على سطح كرة</u>

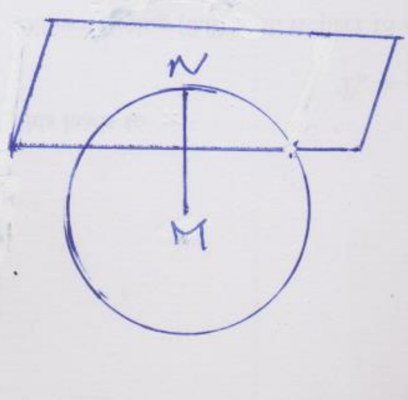
يُعرف العمودي على سطح كرة عند نقطة N مثلاً بأنه العمود من N على المستوى المماس للكرة عند N.

فإذا كانت $N(x_1,y_1,z_1)$ وأن الكرة معطاة بالمعادلة

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$$

فإن مركز الكرة هو $M(-a,-b,-c)$

ويكون MN هو العمودي على سطح الكرة عند N وتكون معادلاته هي



$$\frac{x-x_1}{-a-x_1} = \frac{y-y_1}{-b-y_1} = \frac{z-z_1}{-c-z_1}$$

or $\dfrac{x-x_1}{a+x_1} = \dfrac{y-y_1}{b+y_1} = \dfrac{z-z_1}{c+z_1}$ ##

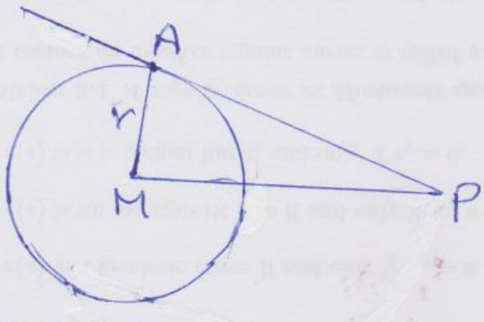
وفي هذا السياق نعطي معادلة المستوى المماس للكرة من

$$(x_1+a)(x-x_1)+(y_1+b)(y-y_1)+(z_1+c)(z-z_1)=0$$

$$\Longrightarrow xx_1+yy_1+zz_1+a(x+x_1)+b(y+y_1)+c(z+z_1)+d=0$$

طول المماس المرسوم للكرة من نقطة خارجها

إذا كانت النقطة $P(x_1,y_1,z_1)$ تقع خارج الكرة فإنه علينا رسم عدد لانهائي من نقط P من المماسات للكرة والتي تكون أطوالها كلها متساوية. فإذا كانت أحد هذه المماسات يمس الكرة عند نقطة A فإن



$$\overline{PA}^2 = \overline{MP}^2 - r^2$$
$$= x_1^2+y_1^2+z_1^2+2ax_1+2by_1+2cz_1+d \quad \#\#$$

مع الأخذ في الإعتبار أننا عوضنا عن $r=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$ وعن مركز الكرة $M=(-a,-b,-c)$

المستوى الأساسي للكرتين

نفرض معادلتي الكرتين على الصورة

$$F_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2a_1x+2b_1y+2c_1z+d_1=0$$
$$F_2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2a_2x+2b_2y+2c_2z+d_2=0$$

المعادلة $F_1-F_2=0$ ## تعطي معادلة مستوى يسمى بالمستوى الأساسي للكرتين وهي على الصورة

$$2(a_1-a_2)x+2(b_1-b_2)y+2(c_1-c_2)z+d_1-d_2=0 \quad \#\#$$

هذا المستوى يكون عمودي على خط المركزين وهو يمر بالنقط المشتركة للكرتين ولذلك إذا تماست الكرتان فإن المستوى الأساسي يمس الكرتين عند نقطة تماسهما وإذا تقاطعت الكرتان في دائرة حقيقية كان المستوى الأساسي هو مستوى هذه الدائرة.

<u>تقاطع كرتين</u>

نفرض كرتين $F_1(x,y,z)=0$; $F_2(x,y,z)=0$

حيث $M_1(-a_1,-b_1,-c_1)$; $M_2=(-a_2,-b_2,-c_2)$

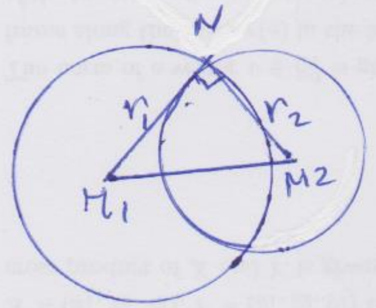
$r_1=\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2-d_1}$ $\quad r_2=\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2-d_2}$

إذا كان $M_1M_2 > r_1+r_2$ فإن الكرتان متباعدتان

وإذا كان $M_1M_2 = r_1+r_2$ كانت الكرتان متماستان

وعند $M_1M_2 < r_1+r_2$ تكون الكرتان متقاطعتان

ويكون التقاطع في دائرة.



وعند تقاطع الكرتين على التعامد

أي عند $\overline{M_1M_2}^2 = r_1^2+r_2^2$ ⊛

فإن شرط التقاطع على التعامد يعطى بـ

$$2a_1a_2+2b_1b_2+2c_1c_2=d_1+d_2$$

وهو نفس المعادلة ⊛.

<u>مثال</u>: أثبت أن الكرتين

$x^2+y^2+z^2-z=0$; $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$

متقاطعتان في دائرة حقيقية

<u>الحل</u>

إذا كان M_1 و r_1 مركز ونصف قطر الكرة الأولى.

وأما r_2 , M_2 مركز ونصف قطر الكرة الثانية فإن

$$M_1 = (0,0,0) \; ; \; r_1 = \sqrt{2}$$

$$M_2 = (1,1,1) \; ; \; r_2 = \sqrt{1+1+1+1} = 2$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2+(1-0)^2} = \sqrt{3}$$

$$r_1 + r_2 = 2 + \sqrt{2} > M_1M_2$$

∴ الكرتين متقاطعتين في دائرة صغيرة

مثال: أثبت أن المستوى $3x-4z-26=0$ يمس الكرة $x^2+y^2+z^2+2x-4y+2z-19=0$ ثم أوجد نقطة التماس إليها

من المعلوم أن المستوى يمس الكرة إذا كان طول العمود الساقط من مركز الكرة إلى المستوى = نصف قطر الكرة

مركز الكرة يعطى من $M(-1,2,-1)$

ونصف قطر الكرة يعطى من

$$r = \sqrt{(-1)^2+(2)^2+(-1)^2-(-19)}$$

$$\Rightarrow r = 5$$

طول العمود الساقط من مركز الكرة للمستوى يعطى من

$$R = \frac{|-1(3) - 1\cdot(-4) - 26|}{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}} = 5 =$$ نصف قطر الكرة

∴ المستوى يمس الكرة

لإيجاد نقطة التماس بين المستوى والكرة (نقطة تقاطع المستوى المماس مع العمودي الساقط عليه من المركز)

لذلك فإن المطلوب هو إيجاد تقاطع معادلات العمودي مع المستوى

معادلات العمودي هي

$$\frac{x-(-1)}{3} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-(-1)}{-4} = \lambda$$

نوجد x, y, z بدلالة λ ونعوض بها في معادلة المستوى نحصل على نقطة التماس كالآتي:

$$x = 3\lambda - 1 \;;\; y = 2 \;;\; z = -4\lambda - 1$$

وبالتعويض في المستوى نجد أن $\lambda = 1$

ويكون عندئذ نقطة التماس هي $x = 2 \;;\; y = 2 \;;\; z = -5$

<u>مثال</u>: أوجد معادلتي الكرتين اللتين تمر كل منهما بالدائرة

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5 \;;\; x + 2y + 3z = 3$$

وتمس كلا منهما المستوى $4x + 3y = 15$

الحل

معادلة أي كرة تمر بالدائرة المعطاة هي

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 5) + \lambda(x + 2y + 3z - 3) = 0 \quad (*)$$

هذه الكرة مركزها $M = \left(-\frac{\lambda}{2}, -\lambda, -\frac{3}{2}\lambda\right)$

ونصف قطرها

$$r = \sqrt{\left(-\frac{\lambda}{2}\right)^2 + (-\lambda)^2 + \left(-\frac{3}{2}\lambda\right)^2 + 5 + 3\lambda}$$

هذه الكرة تمس المستوى المعطى عندما

$$\frac{4\left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 3(-\lambda) - 15}{\sqrt{16 + 9}} = \sqrt{\frac{7}{2}\lambda^2 + 3\lambda + 5}$$

ومنها نحصل على

$$\lambda = -\frac{4}{5} \text{ or } \lambda = 2$$

وعندئذٍ فإن معادلتي الكرتين (*) نحصل عليها بعد التعويض لقيمتي λ وهما

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z-11=0\ ,$$
$$5x^2+5y^2+5z^2-4x-8y-12z-13=0$$

مثال: أوجد المستوى الأساسي للكرتين

$$F_1=x^2+y^2+z^2+6y+\ \ +8=0\ ,$$
$$F_2=x^2+y^2+z^2+6x+8y+4z+20=0$$

ما هي العلاقة بين هاتين الكرتين ؟

الحل

نعطي معادلة المستوى الأساسي للكرتين من

$$F_1-F_2=0$$

$$\Rightarrow 3x+y+z+6=0 \qquad \text{المستوى المطلوب}$$

نوجد طول العمود الساقط من مركز إحدى الكرتين على المستوى الأساسي مع نصف قطرهما

$$M_1=(0,-3,-1)\ ;\ r_1=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2-8}=\sqrt{2}$$

$$M_2=(-3,-4,-2)\ ,\ r_2=\sqrt{9+16+4-20}=3$$

نوجد طول العمود الساقط من مركز الكرة الأولى مثلاً إلى المستوى

$$\frac{0(3)-3(1)-1(1)+6}{\sqrt{9+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{11}}<r_1$$

أي أن طول العمود أقل من نصف قطر الكرة التي استخدمناها وعليه فإن الكرتان متقاطعتان .